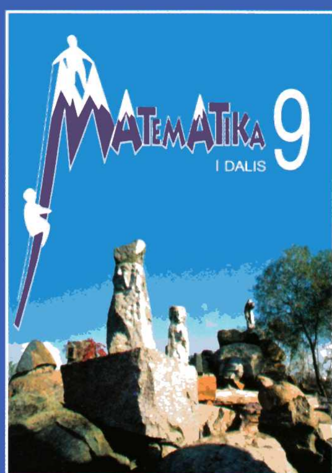
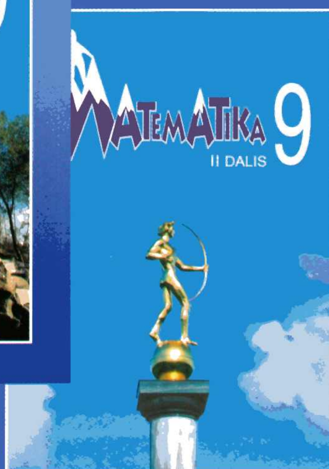
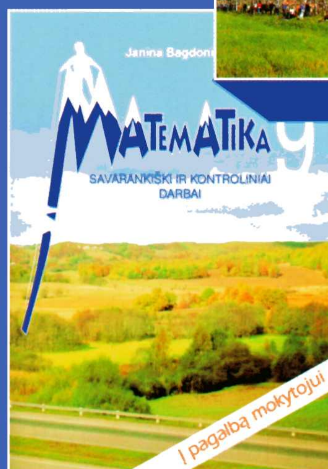
MATEMATIKA 9

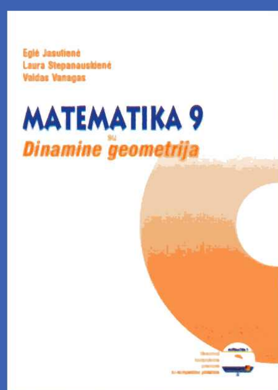
MOKYTOJO KNYGA











MATEMATIKA 9

MOKYTOJO KNYGA

TEV

VILNIUS 2006

UDK 372.851
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2001 07 12, Nr. 218

Pataisytas ir papildytas leidimas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Daiva Sniečkutė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Aleksandras Plikusas, Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

2006 08 01. 23,5 sp. l. Užs. Nr. 1400
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Sapnų sala",
S. Moniuškos g. 21, LT-08121 Vilnius

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-680-41-5

TURINYS

Gerbiami mokytojai,

Tai antrasis pataisytas ir papildytas mokytojo knygos, parengtos pagal vadovėlį „Matematika 9, I ir II dalys“ ir su juo suderintą uždavinyną, leidimas.

Pirmąjį mokytojo knygos leidimą rengė pedagogai: Irena Bagdonienė, Jolanta Knyvienė, Adelija Kuzmarskienė, Kazimieras Pulmonas ir Juozas Šinkūnas.

Šį antrąjį leidimą rengė Irena Bagdonienė, Raimonda Siaurusevičiūtė ir Valdas Vanagas.

Šiame leidime didžiausią dėmesį kreipėme tiems, kas teturi 3 savaitines pamokas, nors esame įsitikinę, kad toks mažas savaitinių pamokų kiekis nesiderina nei su standartais, nei su programomis, nei su valstybiniu požiūriu į matematikos vietą pagrindinės mokyklos kurse.

Kaip visada, laukiame jūsų atsiliepimų tiek apie visą komplektą, tiek apie šią mokytojo knygą.

Rašykite adresu: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

LEIDĖJAI

PRATARMĖ

Tai antrasis mokytojo knygos leidimas. Pirmajame šios knygos leidime buvo surašyti 2000 m. leistame vadovėlyje pastebėti netikslumai. Vėlesniuose vadovėlio leidimuose tie netikslumai buvo ištaisyti, bet šioje mokytojo knygoje pastabas apie pirmajame vadovėlio leidime esančius netikslumus palikome, nes mokyklose dar daug kur dirbama su pirmojo leidimo vadovėliais. Suprantama, mokytojams, dirbantiems su vėlesniais nei 2000 m. vadovėlio leidimais, į minėtas pastabas reaguoti nereikia.

Šios mokytojo knygos struktūra tokia, kaip kitų klasių mokytojo knygų. Tik šioje mokytojo knygoje (kaip ir 10 klasės mokytojo knygoje), aptarus kiekvieno *skyriaus* ypatumus, pateikiami tame skyriuje vadovėlio autorių keliami tikslai mokinių žinioms. Tikslai suskirstyti lygmenimis: *minimaliuoju*, *pagrindiniu* ir *aukštesniuoju*. Tai mokytojams turėtų palengvinti planuoti darbą, atsirinkti, kas yra svarbiausia, padėti diferencijuoti mokymo procesą pirminiame profiliavimosi etape.

Manome, kad minimaliu lygmeniu nusakytus reikalavimus ir tikslus turi įveikti visi, net ir silpniausi mokiniai; būsimiems humanitarams orientyras galėtų būti minimaliu ir pagrindiniu lygmeniu įvardyti tikslai; būsimiems realinės pakraipos moksleiviams orientuotis reikėtų ir į aukštesniu lygmeniu nurodytus reikalavimus ir tikslus.

Dėstant naują medžiagą reikėtų padėti mokiniams išvengti mechaniško kalimo ir siekti, kad mokiniai suprastų esminius dalykus, mokėtų paaiškinti, *kodėl* yra taip ar kitaip. Reikia siekti, kad mokiniai sugebėtų įprastinius sakinius užrašyti matematine (simbolių) kalba, taip pat ir atvirkščiai — matematines išraiškas, brėžinius, lygčių sprendimą persakyti žodžiais. Būtina mokinius pratinti analizuoti sąlygą, prognozuoti, tikrinti atsakymą, daryti išvadas ir apibendrinimus, uždavinio sprendimą skirstyti etapais.

Mokytojui nebūtina laikytis vadovėlio metodinio stiliaus — svarbiausia, kad mokiniai teisingai suvoktų esminius momentus ir mokėtų naudotis išeita medžiaga spręsdami konkrečius uždavinius.

Vadovėlyje „Matematika 9“ yra 11 skyrių. Kiekvienas skyrius padalytas į skyrelius. Kiekviename jų pateikiama teorinė medžiaga ir uždaviniai. Teorinė medžiaga duodama siekiant pakartoti jau žinomus dalykus ir juos praplečiant iki dar nežinomų, bet programoje numatytų matematinių tiesų. Pilkame fone pateikta neprivaloma teorinė medžiaga, skirta temai pagilinti. Neprivalomą medžiagą patartina nagrinėti tik su stipresniais mokiniais ir su tais, kurie planuoja pasirinkti realinį profilį. (Neprivalomą teorinę medžiagą atitinkantys uždaviniai vadovėlyje yra nuspalvinti, o uždavinyne — pabraukti.) Teorinė vadovėlio medžiaga yra gana plati, todėl ją gali skaityti ir suprasti patys mokiniai. Mokytojui reikėtų pratinti mokinius dirbti su vadovėliu savarankiškai, t. y. skaityti teoriją, ieškoti atsakymų į klausimus ir patiems juos kelti. Vadovėlio teorinėje dalyje yra daug klausimų ir užduočių, kuriuos turėtų atlikti mokiniai. Apie du trečdalius kiekvieno skyrelio pirmųjų užduočių yra skiriama einamai teorinei medžiagai mokyti, o likusios užduotys — praeitai medžiagai gilinti, plėtoti ir kartoti. Sunkesnių uždavinių numeriai pažymėti žvaigždute. Mokytojas neprivalo reikalauti išspręsti visus uždavinius. Kiekvieno skyriaus gale yra skyrelis „Pasitikrinkite“. Jo uždavinius mokiniai turėtų mokėti išspręsti savarankiškai. Ruošdami kontrolinius darbus mokytojai gali juo remtis kaip tam tikru standartu. Beje, tikrinant mokinių žinias labai pravers į vadovėlio komplektą įeinanti Janinos Bagdonienės savarankiškų ir kontrolinių darbų knygelė. Tiek mokytojams, tiek mokiniams pravers uždavinynas, kuriame yra daugiau kaip 750 uždavinių, atitinkančių vadovėlio turinį.

Šioje, kaip ir kitose mokytojo knygose, buvo stengtasi per daug nenurodinėti, kaip mokyti vaikus, kaip planuoti pamoką ir pan. Taip pat čia nerasite plačių didaktinių apibendrinimų ar gilių metodologinių samprotavimų. Autorių tikslas buvo koncentruotai ir trumpai suformuluoti dėstomos medžiagos esmę akcentuojant matematinę kurso pusę. Patyrusiems mokytojams gali pasirodyti, kad kai kurie paaiškinimai per daug detalūs, bet jiems neturėtų būti sunku atsirinkti tai, kas svarbiausia.

Dėstydamas matematiką 9 klasėje mokytojas turi būti susipažinęs su pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartais bei matematikos programa 5–10 klasėms. Beje, programos ir standartai keičiasi kas 4 metai, todėl mokytojui reikėtų atkreipti dėmesį į visus pakeitimus. Paskutinį kartą programos keitėsi 2003 m. (Jos vėl keisis 2007 m.) 2003 metų programos ypatybė yra ta, kad ji parengta pagal leidyklos TEV vadovėlius — galima sakyti — perrašytas (ir, deja, ne visai tiksliai) vadovėlių turinys.

Toliau spausdiname mokomosios kompiuterinės priemonės „Matematika 9 su Dinamine geometrija“ turinį. Šią priemonę turi visos mokyklos. Rekomenduojame ja naudotis dėstant medžiagą, aiškinantis uždavinių sprendimus, rengiant projektinius darbus ir pan.

Mokomosios kompiuterinės priemonės „Matematika 9 su Dinamine geometrija“ turinys

6. APSKRITIMAS. SKRITULYS

6.1. Apskritimo lygtis

6.1.1. Apskritimas ir skritulys. Spindulys, styga, skersmuo
6.1.2. Apskritimo (skritulio) ilgio ir ploto priklausomybė nuo spindulio ilgio
6.1.3. Apskritimo (skritulio) ilgio ir ploto priklausomybė nuo skersmens ilgio
6.1.4. Apskritimo (skritulio) ilgio ir skersmens ilgio santykis
6.1.5. Lygtis apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžios taške
6.1.6. Lygtis apskritimo, kurio centras yra abscisių ašyje
6.1.7. Lygtis apskritimo, kurio centras yra ordinačių ašyje
6.1.8. Lygtis apskritimo, kurio centras yra taške $O(a; b)$
6.1.u. Pratimai ir uždaviniai: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18

6.2. Apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis

6.2.1. Kiek bendrų taškų gali turėti apskritimas ir tiesė
6.2.2. Koks yra ryšys tarp apskritimo spindulio ilgio ir atstumo nuo apskritimo centro iki tiesės
6.2.3. Apskritimo stygos ir jai statmeno to apskritimo skersmens savybė
6.2.4. Apskritimo stygos ir ją pusiau dalijančio to apskritimo skersmens savybė
6.2.5. Apskritimo liestinės ir to apskritimo spindulio, nubrėžto į lietimosi tašką, savybė
6.2.6. Tiesė, einanti per apskritimo spindulio galą ir statmena tam spinduliui
6.2.7. Kiek apskritimui galima nubrėžti liestinių, einančių per šalia apskritimo esantį tašką
6.2.8. Liestinių, einančių per šalia apskritimo esantį tašką, savybė
6.2.u. Pratimai ir uždaviniai: 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 37, 38, 44

6.3. Dviejų apskritimų tarpusavio padėtis

6.3.1. Dviejų susikertančių apskritimų bendrosios stygos savybė
6.3.2. Dviejų susikertančių apskritimų bendrosios stygos savybės įrodymas
6.3.3. Dviejų susikertančių apskritimų bendrosios liestinės
6.3.4. Dviejų iš išorės besiliečiančių apskritimų bendrosios liestinės
6.3.5. Dviejų iš vidaus besiliečiančių apskritimų bendroji liestinė
6.3.6. Dviejų apskritimų, neturinčių bendrų taškų, bendrosios liestinės
6.3.u. Pratimai ir uždaviniai: 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 56

6.4. Centriniai kampai

6.4.1. Ką vadiname centriniu kampu
6.4.2. Centrinį kampą atitinkančio lanko didumas laipsniais
6.4.3. Centrinį kampą atitinkančio lanko didumas radianais
6.4.u. Pratimai ir uždaviniai: 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 70, 75, 78

6.5. Įbrėžtiniai kampai

6.5.1. Ką vadiname įbrėžtiniu kampu
6.5.2. Įbrėžtinio ir jį atitinkančio centrinio kampo didumų ryšys
6.5.3. Įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką, didumas
6.5.4. Susikertančių stygų savybė
6.5.5. Apskritimo stygų, kurių tęsiniai kertasi už apskritimo, savybė
6.5.u. Pratimai ir uždaviniai: 80, 81, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 101

6.6. Įbrėžtiniai daugiakampiai

6.6.1. Įbrėžtinis trikampis
6.6.2. Įbrėžtinis keturkampis
6.6.3. Įbrėžtinis penkiakampis
6.6.4. Įbrėžtinis šešiakampis
6.6.5. Taškų, esančių atkarpos vidurio statmenyje, savybė
6.6.6. Kaip nubrėžti atkarpos vidurio statmenį, naudojantis liniuote ir kampainiu
6.6.7. Kaip nubrėžti atkarpos vidurio statmenį, naudojantis liniuote be padalų ir skriestuvu
6.6.8. Kaip apie trikampį apibrėžti apskritimą
6.6.9. Ar apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą
6.6.10. Įbrėžtinio keturkampio savybė
6.6.11. Įbrėžtinio keturkampio savybės įrodymas
6.6.u. Pratimai ir uždaviniai: 103, 105, 107, 108, 109, 110, 112, 114, 118

MATEMATIKOS VADOVĖLIO 9 KLASEI TURINYS

Vadovėlis sudarytas iš dviejų dalių. Nors pagal puslapių skaičių abi vadovėlio dalys yra vienodos, bet pirmajai vadovėlio daliai siūlome skirti daugiau laiko, nes ją sudarančios temos yra svarbesnės. Kad lengviau būtų planuoti darbą, pateikiame vadovėlio turinį nurodydami *orientacinį minimalų* skaičių pamokų kiekvienai *privalomai* temai įsisavinti. Orientaciniai minimalūs pamokų skaičiai nurodyti skliausteliuose šalia kiekvienos dalies, skyriaus ir privalomojo skyrelio pavadinimų. (Suprantama, nurodytą pamokų skaičių galima keisti savo nuožiūra.) Kurso planas pateiktas 105 metinėms (3 savaitinėms) pamokoms ir 140 metinių (4 savaitinėms) pamokų. Trijų savaitinių pamokų atveju rekomenduojame skyrių „Tyrimo uždaviniai“ nagrinėti papildomu — moduliams skirtu laiku, arba nenagrinėti iš viso.

Pastaba. Į rekomenduojamą minimalų pamokų *skyriui* nagrinėti skaičių įeina viena papildoma pamoka, kuri gali būti skirta skyriui pakartoti, kontroliniam darbui.

I dalis (58, 70)

II dalis (41, 70)

1, **2**, **3**, **5**, **7**, **10** skyriai yra algebros, **4**, **6**, **9** — geometrijos, **8** — tikimybių teorijos ir matematinės statistikos.
Pastaba. **11** skyriaus uždavinius rekomenduojama spręsti visais mokslo metais.

Iš *algebros* svarbiausia gebėti:
- atpažinti funkcijas $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$ ir nubraižyti jų grafikus;
- spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas (turinčias vieną sprendinį);
- spręsti kvadratines lygtis;
- spręsti paprastas racionaliąsias lygtis ir jas taikyti sprendžiant tekstinius uždavinius;
- spręsti uždavinius, susijusius su paprastaisiais procentais.

Iš *geometrijos* svarbiausia gebėti:
- formuluoti Talio teoremos išvadą;
- remtis trikampių panašumu sprendžiant uždavinius;
- remtis kampo pusiaukampinės savybe sprendžiant uždavinius;
- remtis trikampio pusiaukraštinių savybe sprendžiant uždavinius;
- remtis trikampio ir trapecijos vidurinės linijos savybėmis sprendžiant uždavinius;
- remtis apskritimo liestinės savybėmis sprendžiant uždavinius;
- remtis centrinio ir įbrėžtinio kampų savybėmis sprendžiant uždavinius;
- įbrėžti į trikampį ir apibrėžti apie jį apskritimus;
- nustatyti, ar galima į duotąjį keturkampį įbrėžti (apibrėžti apie jį) apskritimą;
- sprendžiant uždavinius remtis sąryšiais tarp taisyklingojo daugiakampio (trikampio, keturkampio, šešiakampio) kraštinės ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių;
- apskaičiuoti skritulio išpjovos lanko ilgį ir plotą; skritulio nuopjovos plotą (paprasčiausiais atvejais);
- nustatyti atstumą nuo taško iki plokštumos;
- apskaičiuoti taisyklingosios piramidės, kūgio ir rutulio paviršiaus plotą ir tūrį.

Iš *tikimybių teorijos ir matematinės statistikos* svarbiausia gebėti:
- apskaičiuoti atsitiktinio įvykio tikimybę, kai bandymo baigtys vienodai galimos;
- rasti rinkinių skaičių naudojantis galimybių medžiu bei daugybos taisykle;
- atpažinti, ar tarp dviejų to paties objekto požymių yra tiesinis sąryšis (ar požymiai yra koreliuoti).

1. TIESINĖ FUNKCIJA

Programoje nurodyta, kad 9 klasėje reikia mokyti spręsti tiesinių lygčių sistemas ir kvadratines lygtis, daug dėmesio skiriant *grafiniam* sprendimo būdui. (Apskritai programoje, pagal kurią buvo rengiamas šis vadovėlis, daug dėmesio skiriama uždavinių grafiniam sprendimui — tai vienas tos programos skiriamųjų bruožų lyginant ją su ankstesnių laikų programomis.) Todėl šiame vadovėlyje, prieš mokant spręsti tiesinių lygčių sistemas (3 skyrius) ir kvadratines lygtis (5 skyrius), nagrinėjama tiesinė funkcija (1 skyrius) ir kvadratinė funkcija (2 skyrius) išskiriant grafikų braižymą.

Šio skyriaus apimtis yra gana plati. Bet mokytojas, atsižvelgdamas į turimų savaitinių pamokų skaičių bei mokinių žinias ir gebėjimus, privalo kelti realius tikslus. Pagrindinis šio skyriaus tikslas — ***išmokyti mokinius atpažinti tiesinę funkciją ir nubraižyti tiesinės funkcijos grafiką*** (1.4 skyrelis).

Taip pat šiame skyriuje mokoma apskaičiuoti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų ir atkarpos vidurio taško koordinates (1.1 skyrelis); plėtojama funkcijos sąvoka — nagrinėjami grafikai, tiriamos savybės (1.2 skyrelis); tęsiant 8 klasėje nagrinėtą dviejų dydžių tiesioginį ir atvirkštinį proporcingumą tiriamos funkcijos $f(x) = kx$ (1.3 skyrelis) ir $f(x) = \frac{k}{x}$ (1.6 skyrelis) ir braižomi jų grafikai. Būtų gerai, kad baigiant šią temą mokiniai gebėtų atpažinti funkcijas $f(x) = kx$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = kx + b$, suprastų koeficientų k ir b prasmę, mokėtų nubraižyti tų funkcijų grafikus, nusakyti pagrindines jų savybes.

Nagrinėdami funkcijas turime galimybę susipažinti su sekomis (1.2 skyrelis), o nagrinėdami tiesinę funkciją — su aritmetine progresija (1.4 skyrelis). Nuosekliai aritmetinė progresija bus nagrinėjama 11 klasėje, todėl dabar gilintis į tai nereikia. Turėdami mažiau pamokų ar silpnesnę klasę šios dalies visai nenagrinėkite.

Nurodymai. 1) Mokslo metų pradžioje rekomenduojame nemažai laiko skirti praeitų metų kurso kartojimo pratimams.

2) Šio skyriaus medžiaga turėtų būti nesunkiai suvokiama mokiniams, nes 8 klasėje buvo įvesta funkcijos sąvoka, nagrinėjami grafikai, tiriami tiesiogiai ir atvirkščiai proporcingi dydžiai (Matematika 8, II dalis, 9 skyrius, 1–2 skyreliai). Planuodami darbą atsižvelkite į tai, kaip mokiniai įsisavino tą medžiagą.

3) Neprivalomą pirmųjų dviejų *skyrių* medžiagą galima panaudoti temai „Funkcijos ir grafikai" gilinti. (9 ir 10 klasėse mokiniams galima siūlyti modulį „Funkcijos ir grafikai".)

4) Rekomenduojame mokytojams perskaityti docento R. Kudžmos straipsnį „Devintokų matematikos vadovėlį pasklaidžius..." žurnale „Alfa plius omega", 2001, Nr. 1(11).

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti atpažinti tiesinę funkciją $f(x) = kx + b$ ir mokėti nubraižyti jos grafiką.
2. Apskaičiuoti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų, esančių kuriai nors koordinačių ašiai lygiagrečioje tiesėje, kai žinomos tų taškų koordinatės.
3. Apskaičiuoti atkarpos vidurio taško koordinates, kai atkarpa yra tiesėje, lygiagrečioje kuriai nors koordinačių ašiai, ir žinomos tos atkarpos galų koordinatės.
4. Gebėti iš funkcijos grafiko nustatyti: funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis; intervalus, kuriuose funkcija didėja, kuriuose mažėja, kuriuose yra pastovi.

Pagrindinis lygmuo:

5. Atpažinti funkcijas $f(x) = kx$, $f(x) = kx + b$, $f(x) = \frac{k}{x}$ ir mokėti nubraižyti jų grafikus.
6. Suprasti funkcijų $f(x) = kx$, $f(x) = kx + b$ koeficientų k ir b prasmę.
7. Nustatyti dviejų tiesių $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ tarpusavio padėtį.
8. Apskaičiuoti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų, kai žinomos tų taškų koordinatės.
9. Apskaičiuoti atkarpos vidurio taško koordinates, kai žinomos tos atkarpos galų koordinatės.
10. Iš funkcijos grafiko nustatyti, ar funkcija yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.
11. Gebėti nustatyti, ar duotoji kreivė yra *funkcijos* grafikas.
12. Gebėti parašyti lygtį tiesės, kuri eina per du duotuosius taškus.

Aukštesnis lygmuo:

13. Gebėti algebriškai nustatyti, ar funkcija yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.
14. Gebėti algebriškai įrodyti, kad duotoji funkcija intervale yra didėjanti (mažėjanti, pastovioji).
15. Mokėti nusakyti dviejų tiesių statmenumą.
16. Mokėti išvesti bendrąją tiesės lygtį.

1.1. Atstumas tarp dviejų taškų. Atkarpos vidurio taško koordinatės

Šio skyrelio teorinė medžiaga yra palyginti lengva, todėl neturėtų būti sunku „išjudinti“ mokinius po vasaros atostogų. Mokslo metų pradžioje reikėtų priminti mokiniams svarbesnius jau jiems žinomus faktus. Šiame skyrelyje yra gera proga pakartoti 8 klasėje žinomus: kėlimą laipsniu, kvadratinės šaknies traukimą, Pitagoro teoremą. Taip pat reikėtų prisiminti tiesinės lygties sprendimą, modulio sąvoką. Rekomenduojame pradėti nuo kartojimo uždavinių (17–24; 42–48).

Pagrindinį šio skyrelio tikslą nusako pavadinimas. Tas tikslas neturėtų būti sunkiai pasiekiamas, nes 8 klasėje buvo išvesta atstumo tarp dviejų plokštumos taškų formulė (Matematika 8, I dalis, 118 p., Pavyzdys). Šiame skyrelyje visiškai naujas yra tik atkarpos vidurio taško koordinačių radimas.

Nurodymas. Pratinkite mokinius kalbėti — siekite, kad skyrelyje pateiktas formules mokiniai mokėtų nusakyti žodžiais.

Pakartoti:

tiesines lygtis ir nelygybes;
skaičiaus modulio sąvoką;
Pitagoro teoremą;
mastelį;
dviejų skaičių aritmetinį vidurkį;
trikampių lygumo požymius;
greitosios daugybos formules.

Išmokti:

apskaičiuoti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų;
apskaičiuoti atkarpos, priklausančios koordinačių plokštumai, vidurio taško koordinates.

Šiame skyrelyje:

1. Mokoma skaičiuoti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų (koordinačių plokštumai priklausančios atkarpos ilgį). Galimi trys atvejai:

   1) taškai (atkarpa) priklauso kuriai nors koordinačių ašiai;

   2) taškai (atkarpa) yra tiesėje, lygiagrečioje kuriai nors koordinačių ašiai;

   3) taškai (atkarpa) nėra kurioje nors koordinačių ašyje ir nėra tiesėje, lygiagrečioje kuriai nors ašiai.

   Visais trim atvejais atstumą tarp taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ (atkarpos AB ilgį) galima apskaičiuoti remiantis formule $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Tačiau 1) ir 2) atvejais atstumo tarp taškų skaičiavimas supaprastėja. Todėl vadovėlyje minėta eilės tvarka ir yra nagrinėjami visi trys atvejai. Tai daroma nagrinėjant gyvenimišką situaciją — remiantis maršruto schema skaičiuojamas maršruto ilgis. Po to pateikiamos taisyklės ir formulės, atitinkančios 1) ir 3) atvejus:

   > *Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių ašiai, lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui.* $MN = |x_N - x_M|$.

   > *Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių plokštumai, lygus kvadratinei šakniai iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos.*
   > $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

   Nurodymas. Galima pasiūlyti mokiniams užrašyti atstumo tarp dviejų taškų formules, kai taškai priklauso y ašiai; kai taškai priklauso tiesei, lygiagrečiai kuriai nors iš ašių. Po to padaryti išvadas:
   a) kai taškų abscisės lygios, tai taškai priklauso tiesei, lygiagrečiai y ašiai, ir atstumas tarp jų lygus ordinačių skirtumo moduliui;
   b) kai taškų ordinatės lygios, tai taškai priklauso tiesei, lygiagrečiai x ašiai, ir atstumas tarp jų lygus abscisių skirtumo moduliui.

2. Mokoma skaičiuoti atkarpos, priklausančios koordinačių plokštumai, vidurio taško koordinates, kai žinomos atkarpos galų koordinatės. Čia vėl galimi trys atvejai:

   1) atkarpa priklauso kuriai nors koordinačių ašiai;

   2) atkarpa priklauso tiesei, lygiagrečiai kuriai nors koordinačių ašiai;

   3) atkarpa nėra nei vienoje koordinačių ašyje ir nėra tiesėje, lygiagrečioje kuriai nors ašiai.

   Visais trimis atvejais atkarpos AB, kai $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, vidurio taško C koordinates $(x; y)$ galima apskaičiuoti remiantis formulėmis: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. Šios formulės nėra sudėtingos, ir tiek 1), tiek 2) atvejais ne ką supaprastėja: 1) atveju reikia apskaičiuoti tik vieną atkarpos vidurio taško koordinatę, o kita koordinatė lygi 0; 2) atveju taip pat reikia apskaičiuoti tik vieną atkarpos vidurio taško koordinatę, o kita koordinatė sutampa su tos atkarpos galų atitinkama koordinate. Todėl vadovėlyje pateikiamas ir išsprendžiamas uždavinys, apimantis 1) ir 3) atvejus.

   Nurodymas. Punkto a) sprendimą turi suprasti visi mokiniai, o punkto b) — tik stipresnieji.

   Po to pateikiamos tuos atvejus atitinkanti taisyklė ir formulės:

   > *Atkarpos vidurio taško koordinatės lygios atkarpos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei.*
   > $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

   Pastaba. Remiantis išspręstu uždaviniu pateiktas atkarpos vidurio taško koordinačių formules galima nesunkiai įrodyti. Tai pasiūlykite padaryti stipresniems mokiniams.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 1–16 pratimai; kartojimui — 17–24 pratimai.

1–30
Galima spręsti ir žodžiu.

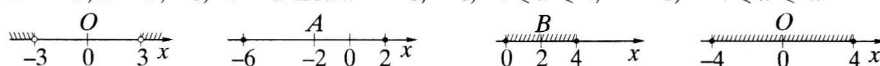
1. a) $A(1,5)$; b) $A(1\frac{1}{3})$; c) $A(1,2)$; d) $A(-0,5)$.

2. a) 4; b) 5; c) 11,5; d) 2,5; e) 12; f) 14,5.

3. **D**; **B**; **C**.

4. a) 0 4 x b) 0 3 x c) −3 0 x d) 0 2 x
e) −2 0 2 x f) −3 0 3 x g) −2 0 2 x h) −4 0 4 x

5. a) $x < -3$; $x > 3$; b) $x = 2$ arba $x = -6$; c) $0 \leqslant x \leqslant 4$; d) $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

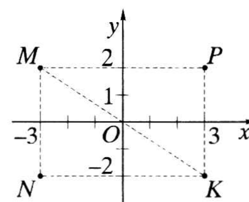


6. Taškai, kurių abscisės lygios, yra tiesėje, lygiagrečioje ordinačių ašiai. Silpnesnieji mokiniai tuo gali įsitikinti braižydami.
Atsakymas. Tiesėje: a) $x = 4$; b) $x = -2$; c) $x = 4,5$; d) $x = -3$; e) $x = 0$ (y ašyje).

7. Taškai, kurių ordinatės lygios, yra tiesėje, lygiagrečioje abscisių ašiai. Silpnesnieji mokiniai tuo gali įsitikinti braižydami.
Atsakymas. Tiesėje: a) $y = 5$; b) $y = -2,5$; c) $y = -4$; d) $y = 1$; e) $y = 0$ (x ašyje).

8. Pagal taško ordinatę galima spręsti, kiek taškas yra nutolęs nuo abscisių ašies, o pagal abscisę — kiek taškas nutolęs nuo ordinačių ašies. a) F; b) N ir L.

9. Patogu visus tris punktus pavaizduoti viename brėžinyje:
a) taškas $N(-3; -2)$ simetriškas taškui M Ox ašies atžvilgiu;
b) taškas $P(3; 2)$ simetriškas taškui M Oy ašies atžvilgiu;
c) taškas $K(3; -2)$ simetriškas taškui M koordinačių pradžios taško atžvilgiu.



10. Pastebėkime, kad kvadrato dviejų viršūnių abscisės ir dviejų viršūnių ordinatės yra lygios. Tai reiškia, kad viena kvadrato kraštinė yra lygiagreti ordinačių ašiai, o kita — abscisių ašiai. Prieš braižant galima pastebėti, kad:
a) viršūnės $D(1; 5)$ ordinatė sutaps su viršūnės C ordinate, o abscisė — su viršūnės A abscise;
b) viršūnės $D(6; 2)$ abscisė sutaps su viršūnės C abscise, o ordinatė — su viršūnės A ordinate.

11. a) 13; b) 5; c) 17; d) 10.

12. a) $MN = 5$; b) $MK = 5$; c) $AB = 13$; d) $PL = 2\sqrt{13}$.

13. a) 5; b) −3; c) 1; d) −3.

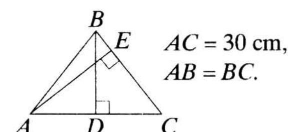
14. Galima elgtis dvejopai: arba iš pradžių nubraižyti atkarpą, o po to apskaičiuoti jos vidurio taško koordinates, arba atvirkščiai — iš pradžių apskaičiuoti atkarpos vidurio taško koordinates, o po to braižyti. Nubraižę ir po to apskaičiavę atkarpos vidurio taško koordinates mokiniai gali įvertinti savo brėžinio tikslumą, pakoreguoti jį.

Pastaba. 2000 m. leidime sąlygoje c) punkte vietoje taško $M(-2; -1)$ turi būti taškas $L(-2; -1)$.

15. **B**.

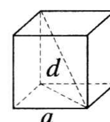
16. **C**. *Nurodymas.* Galima pasiūlyti mokiniams pasitikrinti nubraižius brėžinį arba tiesiog spręsti uždavinį braižant.

17. a) $AB = 25\,\text{cm}$;
b) $BD = 20\,\text{cm}$;
c) $S_{ABC} = 300\,\text{cm}^2$;
d) $AE = 24\,\text{cm}$.



18. $33\pi\ \text{cm}^2$.

19. Nesunku įsitikinti, kad kubo įstrižainės d ilgio kvadratas lygus trijų jo briaunų ilgių kvadratų sumai, t. y. $d^2 = 3a^2$. Tada $d = a\sqrt{3}$.
Atsakymas. a) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$; b) $6\sqrt{3}\,\text{cm}$.



20. a) $-\frac{3}{7}$; b) 20.

21. a) 21; b) $10c - 7$.

22. Tarkime, kad katerio greitis yra x km/h.
a) Tuomet autobuso greitis — $2x$ km/h. Sprendžiame lygtį: $3x + 2x \cdot 1,5 = 135$, $x = 22,5$.
b) Tuomet autobuso greitis — $3x$ km/h. Sprendžiame lygtį: $3x + 3x \cdot 1,5 = 135$, $x = 18$.
Atsakymas. a) 22,5 km/h; b) 18 km/h.

23. **E**.

24. Tarp dviejų sekmadienių, kurie yra neporinės dienos, yra sekmadienis — porinė diena. Kadangi trys sekmadieniai buvo neporinės dienos, tai du sekmadieniai buvo porinės dienos. Mėnesio, turinčio 5 sekmadienius, sekmadieniai gali būti dienos: 1, 8, 15, 22, 29 arba 3, 10, 17, 24, 31.
Tuomet mėnesio 2-oji diena buvo pirmadienis arba šeštadienis.
Atsakymas. **D**.

1.2. Funkcija ir jos grafikas

Su funkcijos sąvoka mokiniai susipažino 8 klasėje (Matematika 8, II dalis, 9 skyrius, 1 skyrelis). Ten funkcija buvo apibrėžta taip:

> *Kintamasis y yra kintamojo x funkcija, jeigu kiekvieną kintamojo x reikšmę atitinka vienintelė kintamojo y reikšmė.*

Buvo įvestos priklausomo ir nepriklausomo kintamojo sąvokos, aiškinta, kas yra funkcijos apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis. Daug dėmesio buvo skiriama funkcijų grafikų braižymui ir jų skaitymui.

Šiame skyrelyje toliau plėtojama funkcijos sąvoka. Vėl daug dėmesio skiriama funkcijų grafikams. Čia funkcija nagrinėjama detaliau, negu 8 klasėje: įvedami apibrėžimo srities ir reikšmių srities žymenys, tiriamos funkcijų savybės (didėjimas, mažėjimas, lyginumas), pasakoma, kas yra funkcijos grafikas. Funkcijų savybės aiškinamos ne tik grafiškai, bet ir algebriškai.

Taip pat šiame skyrelyje kalbama apie funkcijas, kurių apibrėžimo sritis yra tik *natūralieji skaičiai.* Tokios funkcijos dažniausiai vadinamos sekomis.

Svarbiausia šiame skyrelyje pasiekti, kad mokiniai *iš grafiko* mokėtų nustatyti funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti, kuriuose — mažėjanti, kuriuose yra pastovioji. Todėl svarbiausias yra pirmasis teorinės dalies puslapis (14 p.).

Pastaba. Vėlesniuose skyreliuose daug dėmesio bus skiriama *formulėmis* užrašytų funkcijų grafikų braižymui ir nagrinėjimui.

Pakartoti:

kas yra funkcija;
kas yra funkcijos apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis;
funkcijos reiškimo būdus;
kokios figūros vadinamos simetriškomis tiesės atžvilgiu ir kokios — taško atžvilgiu.

Išmokti:

remiantis funkcijos grafiku nustatyti jos apibrėžimo ir reikšmių sritis, funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ar funkcija yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė;
rasti bet kurį sekos narį, kai duota sekos bendrojo nario formulė;
nustatyti, ar duotasis grafikas yra funkcijos grafikas.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjama reali situacija — strėlės aukščio virš žemės priklausomybė nuo strėlės lėkimo laiko. Ta priklausomybė pavaizduota grafiku ir užrašyta *formule.*

   Nurodymai. 1) Mokiniams reikėtų pabrėžti, kad nubraižyta kreivė *nevaizduoja* realios strėlės lėkimo trajektorijos.

   2) Galima panagrinėti šį pavyzdį detaliau, pavyzdžiui, paklausti mokinių, kokiame aukštyje virš žemės strėlė buvo po 2 lėkimo sekundžių; kada strėlės aukštis virš žemės buvo 130 m ir panašiai. Į šiuos klausimus mokiniai turėtų atsakyti remdamiesi grafiku, o po to apskaičiuoti norimas reikšmes remdamiesi formule.

   3) Taip pat atkreipkite mokinių dėmesį, kad grafikas yra tik I ketvirtyje, funkcijos reikšmių nėra po ašimi (t. y. po žeme).

2. Pateikiamas naujas funkcijos apibrėžimas:

   > *Taisyklė, pagal kurią kiekvienai vieno dydžio reikšmei priskiriama vienintelė kito dydžio reikšmė, vadinama funkcija.*

   Pastaba. Dažnai mokiniams toks funkcijos apibrėžimas yra labiau suprantamas nei pateiktas 8 klasėje. Galima pabrėžti, kad pavyzdyje ši taisyklė užrašyta formule ir pavaizduota grafiku.

3. Teigiama, kad strėlė lėkė 10,2 s ir pakilo į 135,2 m aukštį (to nesimato iš grafiko, o kol kas mokiniai to nustatyti negali ir remdamiesi formule). Remiantis tuo užrašomos tos funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys įvedant specialius žymenis $D(f)$ ir $E(f)$.

   Pastabos. 1) Galima laikyti, kad nagrinėjamos funkcijos apibrėžimo srities intervalo galai priklauso tos funkcijos apibrėžimo sričiai, t. y. apibrėžimo sritį užrašyti uždaruoju intervalu (vadovėlyje — atvirasis).

   2) Galima liepti mokiniams nurodyti aukščiausio grafiko taško koordinates bei koordinates taško, kuriame grafikas kerta t ašį.

4. Teigiama, kad pirmąsias 5 sekundes strėlė kilo (tai nesunku nustatyti iš grafiko), ir užrašomas intervalas, kuriame funkcijos reikšmės didėja.

   Pastabos. 1) Nurodydami funkcijos reikšmių didėjimo (mažėjimo) intervalus mokiniai kartais klysta vietoj nepriklausomo kintamojo reikšmių imdami priklausomo kintamojo reikšmes.

   2) Galima paprašyti mokinių nurodyti vadovėlyje esančią korektūros klaidą. Turi būti: „... h reikšmės atitinkamai didėja nuo <u>10,2</u> iki 135,2“.

5. Algebriškai apibrėžiami funkcijos reikšmių didėjimo, mažėjimo ir pastovumo intervalai.

   Sakoma, kad funkcija $y = f(x)$ intervale $(a; b)$:

   - yra didėjanti, jei $f(x_2) > f(x_1)$, kai $x_2 > x_1$ su visais $x_1, x_2 \in (a; b)$;
   - yra mažėjanti, jei $f(x_2) < f(x_1)$, kai $x_2 < x_1$ su visais $x_1, x_2 \in (a; b)$;
   - yra pastovioji, jei $f(x_2) = f(x_1)$ su visais $x_1, x_2 \in (a; b)$.

Nurodymas. Algebriškai apibrėžti funkcijos reikšmių didėjimo, mažėjimo ir pastovumo intervalus turėtų sugebėti tik geresnieji mokiniai.

6. Nagrinėjamos kai kurioms funkcijoms būdingos savybės — lyginumas, nelyginumas. Aišku, lyginių ir nelyginių funkcijų yra mažai, — dauguma funkcijų nėra nei lyginės, nei nelyginės. Lyginės ir nelyginės funkcijų sąvokos iš pradžių aiškinamos remiantis lyginių ir nelyginių funkcijų grafikais. Aiškinama, kaip iš funkcijos grafiko galima pažinti, kuri funkcija yra lyginė, kuri — nelyginė. Vėliau tai bus naudojama norint greičiau nubraižyti lyginės arba nelyginės funkcijos grafiką. Braižant lyginės (arba nelyginės) funkcijos grafiką pakanka sudaryti funkcijos reikšmių lentelę *neneigiamoms* argumento reikšmėms. Tada, koordinačių plokštumoje pažymėję tuos taškus ir jiems simetriškus taškus ordinačių ašies (arba koordinačių pradžios taško) atžvilgiu braižome norimą grafiką.

   Nurodymai. 1) Algebriškai nusakyti, kurios funkcijos vadinamos lyginėmis, kurios — nelyginėmis, siūlykite tik stipresniems mokiniams.

   2) Funkcijų lyginumas (nelyginumas) nėra labai svarbi pagrindinės mokyklos matematikos kurso sąvoka. Svarbesnė ji bus vidurinėje mokykloje.

7. Pateikti grafikai funkcijų, kurios nėra nei lyginės, nei nelyginės.

   Nurodymas. Galima paklausti mokinių, kaip reikia pateiktus grafikus transformuoti (pastumti x ašies kryptimi), kad jie būtų lyginių (arba nelyginių) funkcijų grafikai.

8. Iki šiol daugiausia buvo nagrinėjamos funkcijos, kurių grafikai yra kreivės, t. y. funkcijos, kurių apibrėžimo sritis yra tolydi — intervalas. Vadovėlyje atskirai nagrinėjamos funkcijos, kurių apibrėžimo sritis — *tik* natūralieji skaičiai. Tuomet iš eilės surašydami tos funkcijos reikšmes gauname skaičių seką. Žinoma, ši medžiaga nėra privaloma, todėl ją nagrinėkite tik turėdami laiko ir tik su stipresniais mokiniais.

   Pastabos. 1) Anksčiau buvo įprasta sekas nagrinėti nesiejant jų su funkcijomis.

   2) Svarbu, kad mokiniai matytų ryšį tarp skaičių sekos ir seką atitinkančios formulės.

9. Pateikiamas funkcijos grafiko apibrėžimas:

Funkcijos grafikas — visuma koordinačių plokštumos taškų, kurių abscisės yra argumento reikšmės, o ordinatės — atitinkamos funkcijos reikšmės.

   Atkreipiamas dėmesys į tai, kad ne kiekviena plokštumos kreivė yra funkcijos grafikas. Norint nustatyti, ar duotoji koordinačių plokštumos taškų visuma galėtų būti funkcijos grafikas, reikia įsitikinti, ar kiekvieną nepriklausomo kintamojo reikšmę atitinka *tik viena* priklausomo kintamojo reikšmė.

   Nurodymai. 1) Nebūtina reikalauti iš mokinių, kad jie mokėtų funkcijos grafiko apibrėžimą. Svarbiausia, kad mokiniai gebėtų nubraižyti konkrečios funkcijos grafiką ir iš jo nustatyti tos funkcijos savybes.

   2) Nubraižyti funkcijos grafiką dažnai yra neįmanoma — tada braižoma grafiko dalis (eskizas).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 25–41 pratimai; kartojimui — 42–48 pratimai.

31–36, 89, 90, 91

25. a) Kovo pirmąją dieną — 11 h 15 min;
birželio pirmąją dieną — 15 h;
rugsėjo pirmąją dieną — 13 h 20 min;
gruodžio pirmąją dieną — 9 h 10 min;

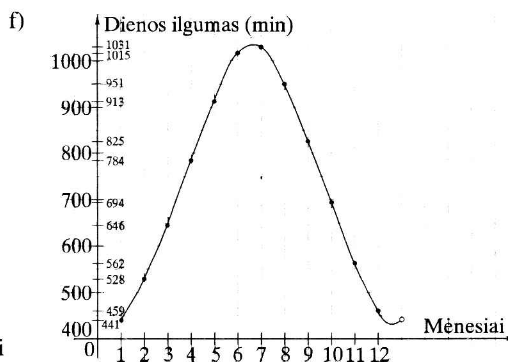
b) sausio mėnesį — 9 h 35 min;
liepos mėnesį — 14 h 35 min;
spalio mėnesį — 10 h 50 min;

c) pavasarį kovo mėn. ir rudenį rugsėjo–spalio mėn;

d) sausio–birželio mėn.; birželio–lapkričio mėn.;

e) ilgiausia diena — 15 h 10 min;
trumpiausia diena — 9 h 10 min;

f)



Pastaba. Iš vadovėlyje pateikto grafiko nieko negalima pasakyti apie gruodžio mėnesį. Akylesnieji mokiniai tai turėtų pastebėti.

26. *Nurodymas.* Tai nevisiškai įprasta situacija, nes, kaip matyti iš grafiko, Rimas, išvažiavęs iš Kretingos, kelionės Kaune nebaigė, o važiavo toliau, o Dainius, išvažiavęs iš Kauno tuo pačiu keliu, iki Kretingos nenuvažiavo.

Atsakymas. a) $\approx$ 225 km; b) po 1 h 20 min; c) Dainius buvo nuvažiavęs maždaug 115 km, o Rimas — maždaug 110 km; d) Dainius važiavo maždaug 87 km/h, o Rimas — maždaug 83 km/h greičiu.

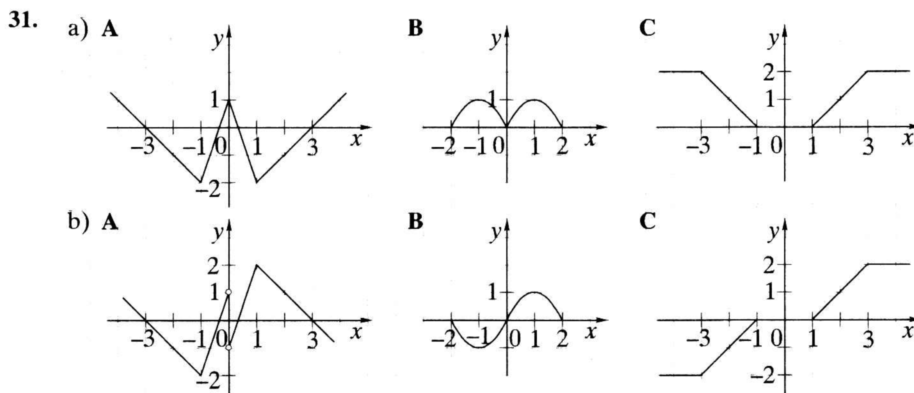
27. Nepriklausomas kintamasis: a) x; b) x; c) t; d) h; e) r; f) r;
priklausomas kintamasis: a) y; b) y; c) s; d) V; e) C; f) V.
Nurodymas. Galima pastebėti, kad:
e) punkte užrašyta apskritimo ilgio priklausomybė nuo jo spindulio;
f) punkte – kūgio tūrio priklausomybė nuo pagrindo spindulio, kai kūgio aukštis lygus h (*Pastaba.* Kūgio tūris bus nagrinėjamas 9 skyriuje.);
d) punkte, jei nebūtų koeficiento 2, tai būtų galima sakyti, kad priklausomybė $V(h) = \pi r^2 h$ reiškia ritinio, kurio pagrindo spindulys yra r, tūrį priklausomai nuo jo aukščio.
d) ir f) punktuose iš simbolikos mokiniai turėtų suvokti, kuri raidė reiškia nepriklausomąjį kintamąjį: punkte d) – h, nes funkcija yra $V(h)$, o punkte f) – r, nes funkcija yra $V(r)$.

28. a) Didėja intervale $(-\infty; +\infty)$;
b) didėja intervale $(-\infty; -2)$, mažėja intervale $(-2; +\infty)$;
c) didėja intervale $(-2; 2)$, mažėja intervale $(-4; -2)$;
d) didėja intervaluose $(-\infty; -4)$ ir $(-1; 0)$, mažėja intervale $(-4; -1)$.

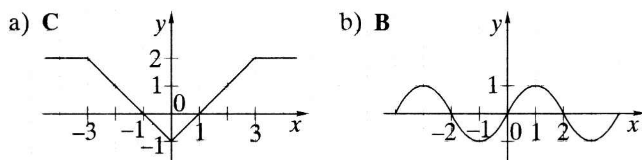
29. Apibrėžimo sritis: a) $(-4; 3)$; b) $[-3; 3)$; c) $(-5; 5)$; d) $(-\infty; +\infty)$;
e) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; f) $(-\infty; +\infty)$.
Reikšmių sritis: a) $[-2; 2)$; b) $[-3; 4)$; c) $[-3; 2]$; d) $(-\infty; +\infty)$;
e) $(-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; -\infty)$; f) $(-3; +\infty)$.

30. **A**, **C** – lyginės funkcijos grafikai; **B** – nelyginės funkcijos grafikas; **D** nėra funkcijos grafikas, nes kai $x = 0$, tai $y = -1$ ir $y = 1$.

31.



Pastaba. Sąlyga ne visai tiksli, todėl galimi ir kitokie atsakymai, pvz.:



32. $v(x)$, $s(x)$ ir $u(x)$ – lyginės; $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ – nelyginės.

33. a), b), d), f) – taip; c), e) – ne.

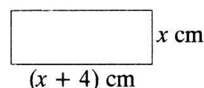
34. a) 2; 4; 6; 8; 10; b) 3; 5; 7; 9; 11; c) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$;
d) 1; 4; 7; 10; 13; e) 1; 4; 9; 16; 25; f) 3; 9; 27; 81; 243;
g) 2; 4; 2; 4; 2; h) −10; 10; −10; 10; −10; i) −3; 1; −3; 1; −3.

35. a) $a_n = 3n$; b) $a_n = 5n$; c) $a_n = 3n + 2$ $(n \in \mathbb{N})$.
Pastaba. 34 ir 35 uždavinių rekomenduojame su visa klase nespręsti. Juos galima spręsti tik su stipresniais mokiniais modulio metu.

36. $y = 10 + 5x$.

37. a) $y = 13{,}6x$; b) $y = 9{,}98x$; c) $y = 0{,}7x$.

38. a) $P(x) = 4x + 8$; $S(x) = x(x + 4)$;
b) $P(5) = 28$; $S(5) = 45$; $P(2{,}5) = 18$; $S(4{,}5) = 38{,}25$;
c) $x = 7$; $x = 10{,}5$.

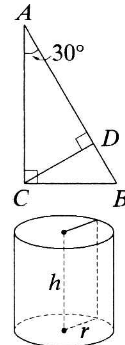


39. a) $(-\infty; +\infty)$; b) $(-\infty; +\infty)$; c) $(-\infty; +\infty)$; d) $(-\infty; +\infty)$; e) $[5; +\infty)$; f) $[-4; +\infty)$; g) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; h) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; i) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

40. Įsitikinkime, kad su visais $x_2 > x_1$ yra teisinga nelygybė $f(x_2) - f(x_1) > 0$:
a) $f(x_2) - f(x_1) = 4x_2 - 4x_1 = 4(x_2 - x_1) > 0$;
b) $f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 + 3 - (2x_1 + 3) = 2(x_2 - x_1) > 0$;
c) $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 > 0$;
d) $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - 2 - (x_1 - 2) = x_2 - x_1 > 0$.

41. Įsitikinkime, kad su visais $x_2 > x_1$ yra teisinga nelygybė $g(x_2) - g(x_1) < 0$:
a) $g(x_2) - g(x_1) = -x_2 + 2 - (-x_1 + 2) = -(x_2 - x_1) < 0$;
b) $g(x_2) - g(x_1) = -2x_2 - (-2x_1) = -2(x_2 - x_1) < 0$;
c) $g(x_2) - g(x_1) = \frac{4-x_2}{2} - \frac{4-x_1}{2} = \frac{-(x_2-x_1)}{2} < 0$;
d) $g(x_2) - g(x_1) = 4 - 3x_2 - (4 - 3x_1) = -3(x_2 - x_1) < 0$.

42. a) Mažiausio kampo dydį pažymėkime x. Tada $x + 2x + 3x = 180°$, $x = 30°$. Trikampio kampų dydžiai yra 30°, 60°, 90°.
b) Matome, kad trikampis yra status, kurio vienas kampas lygus 30°. $BC = 4\,\text{cm}$, $AB = 8\,\text{cm}$; $AC = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.
c) $P = 12 + 4\sqrt{3}\,\text{cm}$;
d) $S = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$;
e) $CD = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$;
f) $BC : AC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$.



43. a) $S_{\text{šon}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi$ (cm^2);
b) $S_{\text{pav}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 60\pi + 50\pi = 110\pi$ (cm^2);
c) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 25 \cdot 6 = 150\pi$ (cm^3).

44. a) 8250; b) 10 800.

45. a) $\frac{4}{3}$; b) 2.

46. a) 608; b) 119; c) 550; d) 40; e) 425.

47. Tarkime, kad mama turėjo $2x$ saldainių. Ji dukrai davė $(x + 1)$ saldainių, o mamai liko $2x - (x + 1) = x - 1$. Tada sūnui mama davė $\left(\frac{x-1}{2} + 5\right)$ saldainių. Iš viso ji išdalijo $(x + 1) + \left(\frac{x-1}{2} + 5\right)$ saldainių.
Kadangi mama negalėjo išdalyti saldainių daugiau, negu jų turėjo, tai turi būti teisinga nelygybė $(x + 1) + \left(\frac{x-1}{2} + 5\right) \leqslant 2x$, $x \geqslant 11$.
Be to, mama tikriausiai saldainių nelaužė per pusę (ar kaip kitaip), todėl $2x$ ir $(x - 1)$ turi būti lyginiai skaičiai. Todėl $x - 1 = 2k$, $k \geqslant 5$, arba $x = 2n + 11$, $n \geqslant 0$ ($k, n \in N$). Taigi mama galėjo turėti $22 + 4n$, kur $n = 0, 1, 2, \ldots$, saldainių, t. y. 22, 26, 30, ...
Patogu sudaryti lentelę:

Mama galėjo turėti	22	26	30	34	38	42	...	$22 + 4n$
Dukra gavo	12	14	16	18	20	22	...	$12 + 2n$
Sūnus gavo	10	11	12	13	14	15	...	$10 + n$
Iš viso mama išdalijo	22	25	28	31	34	37	...	$22 + 3n$
Mamai liko	0	1	2	3	4	5	...	n

Nurodymas. Galima uždavinio sąlygą pakoreguoti pasakant, kad mama išdalijo visus saldainius. Tada reiktų spręsti lygtį $(x + 1) + \left(\frac{x-1}{2} + 5\right) = 2x$.

48. Tarkime, kad kelio ilgis yra s km. Laikas t, per kurį automobilis nuvažiavo visą kelią, yra: $t = \frac{s}{2 \cdot 60} + \frac{s}{2 \cdot 80} = \frac{s}{40 \cdot 3} + \frac{s}{40 \cdot 4} = \frac{7s}{40 \cdot 12} = \frac{7s}{480}$ (h).
Automobilio vidutinis greitis visame kelyje $v = \frac{s \cdot 480}{7s} = 68\frac{4}{7}$ (km/h).
Atsakymas. **B.**

Vidutinis greitis $= \frac{\text{Kelias}}{\text{Laikas}}$

Tęsiant praeitais metais nagrinėtą dviejų dydžių tiesioginio proporcingumo temą (Matematika 8, II dalis, 9 skyrius, 2 skyrelis) šiame skyrelyje nagrinėjama funkcija $f(x) = kx$. Funkciją $f(x) = kx$, kai $k > 0$ ir $x > 0$, galima vadinti tiesioginio proporcingumo funkcija (proporcingumas apibrėžiamas tik teigiamiems dydžiams). Tiesa, dažnai į tai neatsižvelgiama ir literatūroje funkcija $f(x) = kx$, kai $k \neq 0$, taip pat yra vadinama tiesioginio proporcingumo funkcija.

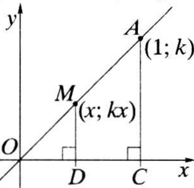
Svarbiausia šiame skyrelyje pasiekti, kad mokiniai atpažintų funkciją $f(x) = kx$ ir mokėtų nubraižyti jos grafiką.

Nurodymas. Skyrelyje nėra griežtai įrodyta, kad funkcijos $f(x) = kx$ grafikas yra tiesė. (To negalima padaryti, nes dar neišnagrinėta trikampių panašumo tema. Prie įrodymo galima grįžti vėliau, mokantis trikampių panašumą.) Įrodant reikia išnagrinėti tris atvejus: kai $k > 0$, kai $k < 0$, kai $k = 0$. Teiginio įrodymas susideda iš dviejų dalių:

1) įrodoma, kad kiekvienas funkcijos $f(x) = kx$ grafiko taškas priklauso tiesei;

2) įrodoma, kad kiekvienas tos tiesės taškas priklauso funkcijos $f(x) = kx$ grafikui.

Įrodysime, kad kiekvienas nagrinėjamos funkcijos grafiko taškas $(x; kx)$ priklauso tiesei, einančiai per taškus $(0; 0)$ ir $(1; k)$. Šio teiginio įrodymas grindžiamas trikampių panašumu, kuris bus nagrinėjamas 4 skyriuje.

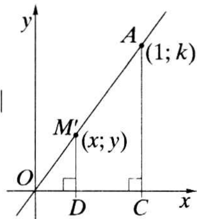


Nubrėžkime tiesę, einančią per taškus $O(0; 0)$ ir $A(1; k)$. Imkime funkcijos $f(x) = kx$ grafikui priklausantį tašką $M(x; kx)$. Nagrinėkime stačiuosius trikampius MDO ir ACO.

Tie trikampiai yra panašūs pagal dvi kraštines ir statų kampą tarp jų, nes $MD : DO = kx : x = k$ ir $AC : CO = k : 1 = k$. Todėl $\angle MOD = \angle AOC$. O tai reiškia, kad tie kampai sutampa. Vadinasi, taškas M priklauso tiesei OA.

Įrodėme, kad nors ir kokį imtume grafiko $y = kx$ tašką, jis yra tiesėje einančioje per taškus $(0; 0)$ ir $(1; k)$.

Dar reikia įrodyti, kad toje tiesėje nebus ne grafiko $y = kx$ taškų, t. y. reikia įrodyti, kad kiekvienas tiesės, einančios per taškus $(0; 0)$ ir $(1; k)$ taškas tikrai yra funkcijos $f(x) = kx$ grafiko taškas.



Imkime bet kurį tos tiesės tašką $M'(x, y)$ Nubrėžkime $M'D$ ir AC statmenas Ox ašiai. Kadangi $M'D \parallel AC$, tai $\triangle M'DO \backsim \triangle ACO$. Todėl $M'D : DO = AC : CO$, t. y. $y : x = k : 1$, $y = kx$.

Tai ir reiškia, kad tiesės taškas M' priklauso funkcijos $f(x) = kx$ grafikui. Taigi nuo šiol žodžiai tiesė $y = kx$ ir funkcijos $f(x) = kx$ grafikas mums reikš tą patį.

Teiginį įrodėme laikydami, kad $k > 0$. Kai $k < 0$ įrodymas yra analogiškas. Kai $k = 0$ turime funkciją $f(x) = 0 \cdot x$. 1) Šios funkcijos grafiko kiekvienas taškas $(x; 0)$ priklauso tiesei, einančiai per taškus $(0; 0)$ ir $(1; 0)$. Ta tiesė — Ox ašis. O kiekvienas taškas, kurio ordinatė 0, priklauso ašiai Ox. 2) Imkime tiesės Ox tašką $(x; 0)$. Jis tikrai priklauso funkcijos $f(x) = 0 \cdot x$ grafikui, nes sutampa su grafiko tašku $(x; x \cdot 0)$.

Pakartoti:

kaip apibūdinami du tiesiogiai proporcingi dydžiai;

ką vadiname proporcingumo koeficientu;

kaip koordinačių plokštumoje išsidėstę tiesiogiai proporcingus dydžius vaizduojantys taškai.

Išmokti:

atpažinti funkciją $f(x) = kx$;

nubraižyti funkcijos $f(x) = kx$ grafiką;

suvokti koeficiento k prasmę;

formule užrašyti funkciją, kurios grafikas yra tiesė, einanti per koordinačių pradžios tašką ir tašką, nesutampantį su koordinačių pradžios tašku.

Šiame skyrelyje:

1. Braižomas funkcijos $f(x) = 2x$ grafikas ir teigiama, kad kiekvienos pavidalo $f(x) = kx$ funkcijos grafikas yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią.
2. Vienoje koordinačių plokštumoje braižomos tiesės $y = 4x$, $y = x$ ir $y = \frac{1}{2}x$, t. y. paimamos trys „patogios“ teigiamos k reikšmės. Padaroma apibendrinanti išvada, kad kai $k > 0$, tai tiesė $y = kx$ eina per I ir III ketvirčius ir kai $k_1 > k_2$, tai tiesė $y = k_1x$ su teigiamąja x ašies kryptimi sudaro didesnį kampą nei tiesė $y = k_2x$. (Mokiniams siūloma padaryti analogiškas išvadas braižant tieses $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -x$ ir $y = -4x$.)

   Pastaba. Pastebėkime, kad tiesės $y = x$ ir $y = -x$ yra atitinkamų koordinatinių ketvirčių pusiaukampinės.
3. Aiškinama koeficiento k prasmė: argumento reikšmei padidėjus 1, funkcijos reikšmė pakinta skaičiumi k.

   Nurodymas. Tuo mokiniams pasiūlykite įsitikinti remiantis anksčiau nubraižytų funkcijų grafikais.
4. Į teorinės dalies pateiktus klaustuku pažymėtus klausimus daugelis mokinių turėtų nesunkiai atsakyti.

   Nurodymas. Papildomai galima paklausti:

   1) Kokia funkcijos $f(x) = kx$, $k \neq 0$, reikšmių sritis?

   2) Kokia funkcijos $f(x) = kx$, $k = 0$, reikšmių sritis?

   3) Ar funkcija yra didėjanti, ar mažėjanti, ar pastovioji, kai $k > 0$; $k < 0$; $k = 0$?

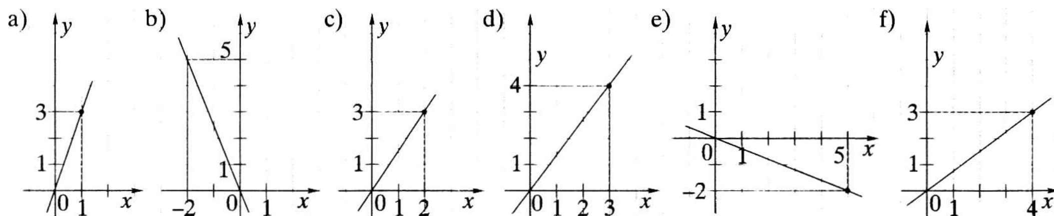
   4) Kiek mažiausiai reikia taškų, norint nubraižyti tiesę?

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 49–59 pratimai; kartojimui — 60–69 pratimai. 37–53, 83

49. a) $k = 2{,}5$; b) $k = \frac{1}{5}$; c) $k = \frac{1}{3}$; e) $k = -\frac{1}{2}$; g) $k = 2\sqrt{2}$; h) $k = 1$.

50. *Nurodymas.* Prieš sprendžiant šį uždavinį, reikėtų dar kartą priminti mokiniams, kad norint nubraižyti tiesę, pakanka rasti *dviejų* jai priklausančių taškų koordinates. Kadangi tiesė $y = kx$ eina per koordinačių pradžios tašką, tai pakanka rasti dar kurio nors kito, tiesei priklausančio taško, koordinates.



51. a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x$; c) $f(x) = -\frac{2}{3}x$; d) $f(x) = -\frac{1}{8}x$.

52. a) I ir III; b) II ir IV; c) I ir III; d) II ir IV.

53. A, B, O.

54. *Pastaba.* Stipresniųjų mokinių galima paprašyti nustatyti ir funkcijos formulę: a) $f(x) = 3x$, b) $f(x) = 2x$, c) $f(x) = -4x$.

55. a), b), d) — tiesė nėra funkcijos $f(x)$ grafikas; c) — tiesė yra funkcijos $f(x)$ grafikas.

56. a) 0; b) -2; c) 2,5; d) -7.

57. a) $f(x) = \frac{1}{3}x$; b) $h(x) = -2x$; c) $u(x) = -\frac{1}{5}x$; d) $g(x) = 4x$.
Funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra didėjančios; funkcijos $h(x)$ ir $u(x)$ — mažėjančios.

Pastaba. 58, 59 pratimai rekomenduojami stipresniems mokiniams.

58. Tarkime, kad $x_2 > x_1$. Įsitikinkime, kad $f(x_2) - f(x_1) > 0$:
a) $f(x_2) - f(x_1) = 6x_2 - 6x_1 = 6(x_2 - x_1) > 0$;
b) $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$;
c) $f(x_2) - f(x_1) = 12x_2 - 12x_1 = 12(x_2 - x_1) > 0$;
d) $f(x_2) - f(x_1) = 2{,}4x_2 - 2{,}4x_1 = 2{,}4(x_2 - x_1) > 0$.

59. Tarkime, kad $x_2 > x_1$. Įsitikinkime, kad $f(x_2) - f(x_1) < 0$:
a) $f(x_2) - f(x_1) = -7x_2 - (-7x_1) = 7(x_1 - x_2) < 0$;
b) $f(x_2) - f(x_1) = -2{,}5x_2 - (-2{,}5x_1) = 2{,}5(x_1 - x_2) < 0$;
c) $f(x_2) - f(x_1) = -\frac{2}{3}x_2 - \left(-\frac{2}{3}x_1\right) = \frac{2}{3}(x_1 - x_2) < 0$;
d) $f(x_2) - f(x_1) = -5x_2 - (-5x_1) = 5(x_1 - x_2) < 0$.

60. a) Taip, nes dydžių a ir $2a$ santykis yra pastovus skaičius, t. y. $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, kai $a \neq 0$.
b) Taip, nes apskritimo spindulio ir jo ilgio santykis yra pastovus skaičius, t. y. $\frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$.
c) Ne, nes dydžių b ir $\frac{1}{b}$ santykis nėra pastovus skaičius, t. y. $b : \frac{1}{b} = b^2$ — kintamas dydis (priklauso nuo b).
d) Ne, nes skritulio ploto ir jo spindulio santykis nėra pastovus skaičius, t. y. $\pi r^2 : r = \pi r$ (priklauso nuo r).

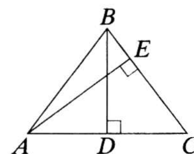
61.

a	3	4	5	6	8	10	16	26
b	27	28	29	30	32	34	40	50
$\frac{b}{a}$	9	7	$5\frac{4}{5}$	5	4	$3\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{12}{13}$

a) Santykis $\frac{b}{a}$ mažėja; b) ne, nes santykis nėra pastovus skaičius;
c) taip; $\frac{b}{a} = 3$; $\frac{a+24}{a} = 3$, $a = 12$; d) 12; e) ne.

62. *Nurodymas.* Patarkite mokiniams nusibraižyti brėžinį. Skaičius 15 skaičiuje 375 „telpa“ 25 kartus ($375 : 15 = 25$). Vadinasi, $x = 1{,}2 \cdot 25 = 30$ (m).
Atsakymas. 30 m.

63. a) $S = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}6 = 1{,}92$ (dm^2);
b) 2 dm; c) 6,4 dm; d) $AE = 1{,}92$ dm; e) $\frac{5}{6}$.



64. a) 8 cm; b) 64π cm^2; c) 16π cm.

65. a) $P = 4x + 12$; b) $S = x^2 + 6x$.

66. I skaičius — $30 \cdot 0{,}6 = 18$; II skaičius — $14 \cdot \frac{2}{7} = 4$.
a) 22; b) 14; c) 72; d) 4,5.

67. $8a + 54$; $a = -6{,}75$.

68. a) $x \leqslant -3$; b) $x > -9$; c) $x \leqslant 2$; d) x — bet koks skaičius.
Pastaba. Atsakymą galima rašyti ir nurodant intervalą.

69. Kiekvieną kartą perplėšus popieriaus lapą ar jo dalį į 4 dalis dalių skaičius padidėja 3 dalimis. Po 10 kartų skiautelių skaičius padidėjo trimis dešimtimis. Taigi susidarė $1 + 30 = 31$ skiautė.
Atsakymas. **D**.

1.4. Funkcija $f(x) = kx + b$

Tai pats svarbiausias šio skyriaus skyrelis. Visi mokiniai turi gebėti atpažinti funkciją $f(x) = kx+b$, žinoti, kad jos grafikas yra tiesė, ir mokėti ją nubraižyti.
Siekite, kad stipresnieji mokiniai suprastų ryšį tarp funkcijų $f(x) = kx$ ir $f(x) = kx + b$, žinotų koeficientų k ir b prasmę, mokėtų greitai nubraižyti tiesinės funkcijos grafiką, galėtų remdamiesi grafiku užrašyti jį atitinkančią funkciją formule.
Be to, šiame skyrelyje tęsiama pažintis su funkcijomis, kurių apibrėžimo sritis yra tik natūralieji skaičiai. Taip apriboję tiesinės funkcijos apibrėžimo sritį ir iš eilės surašius funkcijos reikšmes gaunama skaičių seka, kuri vadinama aritmetine progresija.
Pastabos. 1) Kaip minėta skyriaus pradžioje, nereikia gilintis į aritmetinę progresiją. Su silpnesniais mokiniais galima jos nenagrinėti iš viso.
2) 10 klasėje bus supažindinama su geometrine progresija (ekonomikos skyrelyje, mokant sudėtinius procentus). Bet tai irgi bus neprivaloma medžiaga.

Pakartoti:
funkcijos $f(x) = kx$ grafiką ir koeficiento k prasmę;
skaičių sekos, kaip funkcijos, apibrėžtos natūraliųjų skaičių aibėje, sąvoką.

Išmokti:
atpažinti funkciją $f(x) = kx + b$;
nubraižyti funkcijos $f(x) = kx + b$ grafiką;
suvokti koeficientų k ir b prasmę;
apskaičiuoti koeficiento k reikšmę.

Šiame skyrelyje:

1. Vienoje koordinačių plokštumoje braižomi jau žinomos funkcijos $g(x) = 2x$ ir funkcijos $f(x) = 2x+3$ grafikai. Čia siekiama trijų tikslų — parodyti, kad:
   1) funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas yra tiesė;
   2) tiesės $y = kx$ ir $y = kx + b$ yra lygiagrečios;
   3) tiesę $y = kx + b$ galima gauti lygiagrečiai pastūmus tiesę $y = kx$ per b vienetų y ašimi, t. y. tiesė $y = kx + b$ kerta y ašį taške, kurio ordinatė lygi b reikšmei.

   Pastabos. 1) Galima pasiūlyti mokiniams nusibraižyti ir daugiau pavidalo $y = 2x + b$ tiesių.
   2) Apie dviejų tiesių lygiagretumą dar bus kalbama 5 skyrelyje (32 p.).
   3) Remiantis funkcijų $f(x) = kx$ ir $f(x) = kx + b$ grafikais galima pasakyti, kad bet kurios funkcijos $y = f(x) + c$ ($c \neq 0$) grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $y = f(x)$ grafiką lygiagrečiai y ašiai atstumu $|c|$. Tai labai pravers braižant funkcijų $y = ax^2+c$ ir $y = ax^2+bx+c$ grafikus (2 skyrius).
2. Pilkame fone parodoma, kaip galima užrašyti tiesės, einančios per du duotuosius taškus, lygtį. Tuo tikslu įrodoma, kad dviejų tiesinės funkcijos reikšmių ir atitinkamų argumento reikšmių skirtumų santykis lygus koeficiento k reikšmei.
   Šią medžiagą vertėtų išnagrinėti ir išmokti. Mokiniai pakankamai palankiai sutinka ir įsimena formulę $k = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Šią formulę labai racionalu naudoti ir vyresnėse klasėse.

   Pastaba. Tiesės, einančios per du duotuosius taškus, lygtį galima parašyti ir sudarant dviejų tiesinių lygčių sistemą. (Sistemos bus nagrinėjamos 3 skyriuje.)
3. Apibrėžiama tiesinė funkcija bei nurodoma jos apibrėžimo sritis.

   Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad atsižvelgiant į konkretaus uždavinio sąlygą funkcijos apibrėžimo sritis gali būti siauresnė.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 70–81 pratimai; kartojimui — 82–89 pratimai.

55–74, 76–81, 84–86, 92, 100

70. a) ir c).
Pastabos. 1) Galima paprašyti mokinių nurodyti tų tiesinių funkcijų analizinę išraišką: a) $y = kx + b$, $k > 0$, $b > 0$; c) $y = kx + b$, $k < 0$, $b = 0$.
2) Galima mokiniams pateikti dar du atvejus — kai tiesė lygiagreti x ašiai; kai tiesė lygiagreti y ašiai — ir apibendrinti, kad bet kuri tiesė, nelygiagreti ordinačių ašiai, yra tiesinės funkcijos grafikas.

71. a) $k = 2{,}7$; $b = -6$; b) $k = \frac{4}{7}$; $b = -\frac{5}{7}$; d) $k = \frac{2}{11}$; $b = 0$; e) $k = 4$; $b = 7$.

72. a) $k > 0$, $b > 0$; b) $k < 0$, $b < 0$; c) $k > 0$, $b < 0$; d) $k < 0$, $b > 0$.

73. a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = -x-2$; c) $f(x) = 2x+2$; d) $f(x) = -1{,}5x+3$.
Nurodymas. 73b)–d) pratimus reikėtų pasiūlyti išspręsti 2 būdais.
I būdas.
1) Iš brėžinio nustatyti koeficiento b reikšmę ir įrašyti ją į formulę $y = kx+b$.
2) Užrašyti dviejų, tiesei priklausančių, taškų koordinates ir pagal formulę $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ apskaičiuoti koeficiento k reikšmę.
II būdas.
1) Iš brėžinio nustatyti koeficiento b reikšmę ir įrašyti ją į formulę $y = kx+b$.

2) Į formulę $y = kx + b$ įrašyti „patogaus“, tiesei priklausančio taško, koordinates.

3) Išspręsti lygtį, kurioje nežinomasis yra k.

Šį uždavinį galima spręsti ir sudarius tiesinių lygčių sistemą, panaudojant dviejų, tiesei priklausančių taškų, koordinates. Tačiau taip spręsti galima tik išmokus tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.

74. a) $\frac{f(8)-f(3)}{8-3} = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = k$;

b) $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{-5-3}{4} = -2 = k$; $\frac{f(8)-f(3)}{8-3} = -2$; $f(8) = -15$.

Šį pratimą spręskite tik su stipresniaisiais mokiniais.

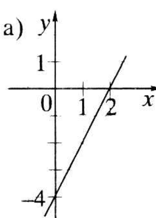
75. a) $f(x) = kx + b$, $k = \frac{4-3}{2-3} = -1$; $f(x) = -x + b$, $4 = -2 + b$, $b = 6$;

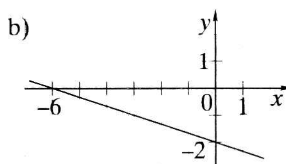
b) $k = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{1}{2}x + b$, $2 = -\frac{1}{2} + b$, $b = 2{,}5$;

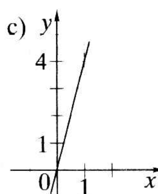
c) $k = \frac{\frac{11}{6} - \frac{10}{3}}{1-2} = 1{,}5$; $f(x) = 1{,}5x + b$, $\frac{10}{3} = 1{,}5 \cdot 2 + b$, $b = \frac{1}{3}$.

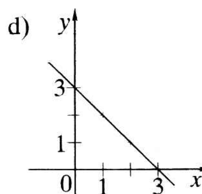
Atsakymas. a) $f(x) = -x + 6$; b) $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5$; c) $f(x) = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

76.

a) 

b) 

c) 

d) 

Nurodymas. Braižant rekomenduojama:

1) ordinačių ašyje pažymėti skaičių b;
2) rasti vieno, tiesei priklausančio taško, koordinates ir pažymėti tą tašką koordinačių plokštumoje;
3) per du gautus taškus brėžti tiesę.

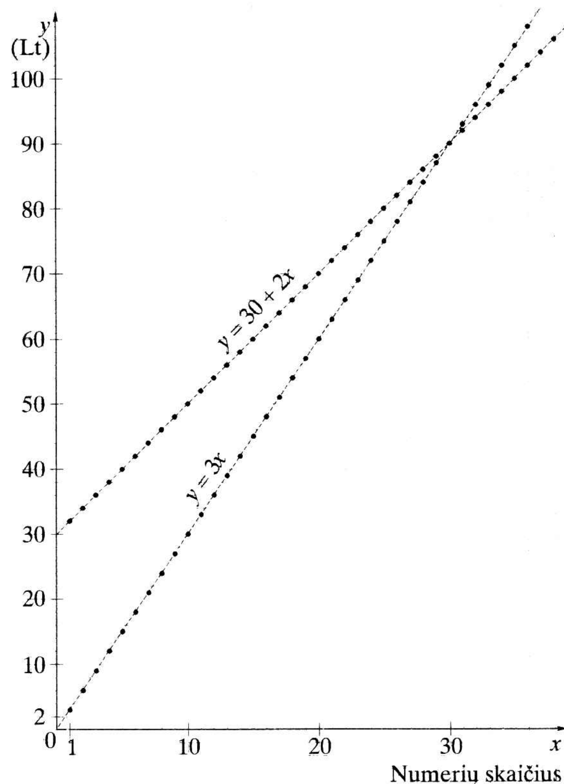
Kuo dažniau priminkite mokiniams, kad tiesei nubrėžti pakanka dviejų taškų.

79. a) Kadangi $20 \cdot 3 < 30 + 2 \cdot 20$, tai naudingesnis I tarifas;

b) $30 + 2 \cdot 26 = 82$ (Lt);

c) $3x \leqslant 200$, $x \leqslant 66\frac{2}{3}$; $30 + 2x \leqslant 200$, $x \leqslant 85$. Taigi daugiausia galima įsigyti 85 numerius.

d) $f(x) = 30 + 2x$; $g(x) = 3x$, $x \in N$;

e) 

Grafikus sudaro atskiri taškai, kurių abscisės — natūralieji skaičiai.

80. a) $y = 4x$;
b) $S(x) = S_{DORE} - 4S_{AMI} = 16^2 - 4 \cdot 4x = 256 - 16x$;
c) $x = 12$;
d) $AM = 10\,\text{m}$;
e) $P = 2(EM + MA) \cdot 4 = 8(2 + 10) = 96\,(\text{m})$.

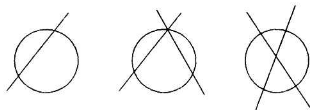
Nurodymas. Brėžinyje $AF \perp ED$.

81. Pirmiausia mokiniai turi suprasti, kad važiavimo taksi mokestis y priklauso nuo nuvažiuotų kilometrų skaičiaus x, nuo kainos už 1 nuvažiuotą kilometrą k ir nuo įsėdimo mokesčio b, t. y. $y = kx + b$.
I būdas. Kadangi Akvilė už 2 km sumokėjo 3 Lt, o Justė už 3 km — 3,9 Lt, tai nuvažiuoti 1 kilometrą kainuoja $3{,}9 - 3 = 0{,}9$ (Lt), t. y. $k = 0{,}9$. Raskime įsėdimo mokestį. Imkime, pavyzdžiui, Akvilės atvejį: $0{,}9 \cdot 2 + b = 3$, $b = 1{,}2$. (Tą patį gautume Justės atveju: $0{,}9 \cdot 3 + b = 3{,}9$, $b = 1{,}2$.) Važiuojant 5 km taksi kainuos: $0{,}9 \cdot 5 + 1{,}2 = 5{,}7$ (Lt).
II būdas. $f(x) = kx + b$, x — kilometrų skaičius;
$k = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{3{,}90 - 3}{3-2} = 0{,}9$ — mokestis už vieną nuvažiuotą kilometrą.
$f(x) = 0{,}9x + b$. Kadangi Akvilė už du nuvažiuotus kilometrus sumokėjo 3 Lt, tai turi būti teisinga lygybė: $3 = 0{,}9 \cdot 2 + b$, $b = 1{,}2$;
$f(x) = 0{,}9x + 1{,}2$, $f(5) = 0{,}9 \cdot 5 + 1{,}2 = 5{,}7$.
III būdas. Galima sudaryti lygčių sistemą:
$$\begin{cases} k \cdot 2 + b = 3, \\ k \cdot 3 + b = 3{,}9, \end{cases} \quad k = 0{,}9,\ b = 1{,}2.$$
Atsakymas. Pavyks.

82. a) $x + x + 2x = 180°$, $x = 45°$ (čia x — mažiausio kampo dydis). Taigi trikampio kampai yra 45°, 45° ir 90°.
b) Pastebėkime, kad trikampis yra statusis lygiašonis. Statinių ilgių suma lygi 36 cm, o vieno statinio ilgis — 18 cm. Remdamiesi Pitagoro teorema apskaičiuojame įžambinės ilgį — $18\sqrt{2}$ cm. Perimetras yra $18(2 + \sqrt{2})$ cm.
c) $S = 162\,\text{cm}^2$.
d) Aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi $9\sqrt{2}$ cm.

83. a) $S_{\check{s}on} = 120$ kv. v.;
b) $S_{pav} = S_{\check{s}on} + 2S_{pagr} = 228$ kv. v.;
c) $V = 216$ kub. v.;
d) $S = 180$ kv. v.

84.



Atsakymas. **D**.

85. Pirmasis skaičius lygus $\frac{6}{7}$. Tuomet antrasis skaičius lygus $\frac{7}{18} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{3}$, o trečiasis — $\left(\frac{6}{7} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{21}$;
$\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{21} = \frac{10}{147}$.
Atsakymas. $\frac{10}{147}$.

86. a) $-5b(a+1)$; b) $p^2(p-1)^2(p+1)^2$; c) $(a-b)(2+y)$; d) $a(a-1)(a-5)$.

87. E.

88. a) 720 Lt; b) 32 %; c) 2702 Lt 70 ct; d) 20,12 %.

89. Košė kainavo $0{,}60 \cdot 3 = 1{,}80$ (Lt).
Kadangi turistai košės suvalgė po lygiai, tai kiekvieno turisto košės dalis buvo išvirta iš $(400 + 200) : 3 = 200$ (g) kruopų ir kainavo $1{,}80 : 3 = 0{,}6$ (Lt) $=$ $= 60$ (ct). Kadangi II turistas davė 200 g kruopų, tai 60 ct atiteks I turistui.

1.5. Dviejų tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje. Tiesės lygtis

Skyrelyje nagrinėjama, kaip keičiasi tiesės $y = kx + b$ padėtis kintant koeficientų k ir b reikšmėms. Šiuo skyreliu siekiama pabrėžti koeficientų k ir b prasmę. Nagrinėjami du atvejai:

1) k reikšmė nekinta, o kinta b reikšmė;

2) b reikšmė nekinta, o kinta k reikšmė.

Nurodymas. Čia galima pasiūlyti dirbti mokiniams savarankiškai grupėmis, ypač silpnesnėse klasėse. Pagal galimybes, tyrimą vertėtų atlikti kompiuterių klasėje.

Neprivalomoje teksto dalyje nagrinėjamas atvejis, kai tiesės yra statmenos viena kitai.
Išvedama bendroji tiesės lygtis $ax + by + c = 0$ ir nagrinėjami atskiri jos atvejai.
Pagrindinis tikslas — išmokyti nustatyti dviejų tiesių tarpusavio padėtį priklausomai nuo koeficientų k ir b reikšmių.

Pakartoti:
tiesinės funkcijos $f(x) = kx + b$ grafiką;
koeficientų k ir b prasmę;
dviejų tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje;
atstumo tarp dviejų taškų formulę.

Išmokti iš tiesių lygčių koeficientų reikšmių nustatyti tiesių tarpusavio padėtį plokštumoje.

Šiame skyrelyje:

1. Koordinačių plokštumoje nubraižoma keletas tiesių, kurių krypties koeficientai yra vienodi, o laisvieji nariai — skirtingi. Padaroma išvada, kad tokios tiesės *yra lygiagrečios*.

   Nurodymai. 1) Silpnesniems mokiniams pasiūlykite nusibraižyti daugiau lygiagrečių tiesių pavyzdžių imant k reikšmę, lygią, pavyzdžiui, 2; $-\frac{1}{2}$.

   2) Pastebėkite, kad tų tiesių su x ašimi sudaromas kampas yra vienodas.

   3) Stipresnių mokinių paprašykite apskaičiuoti atstumą tarp tiesių $y = \frac{1}{2}x$ ir $y = \frac{1}{2}x + 3$.

2. Koordinačių plokštumoje nubraižoma keletas tiesių, kurių laisvieji nariai yra lygūs, o krypties koeficientai — skirtingi. Padaroma išvada, kad tokios tiesės *susikerta* taške, kurio ordinatė lygi b reikšmei.

   Nurodymai. 1) Silpnesniems mokiniams pasiūlykite nusibraižyti daugiau tiesių, susikertančių viename taške, pavyzdžių.

   2) Pastebėkite, kad tokios tiesės y ašį kerta taške b.

   3) Panagrinėkite atvejį $y = b$ $(k = 0)$.

3. Atvejis, kai tiesių krypties koeficientai k ir laisvieji nariai b vienodi, yra mažiausiai įdomus. Todėl „atradimą“, kad tokios tiesės sutampa, siūloma padaryti patiems mokiniams atsakant į klaustuku pažymėtą pirmąjį klausimą.

4. Pateikiama apibendrinanti išvada imant dvi tieses.

   Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$:

   - yra *lygiagrečios*, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$;
   - *sutampa*, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 = b_2$;
   - *susikerta*, jei $k_1 \neq k_2$, o b_1 ir b_2 — bet kokie.

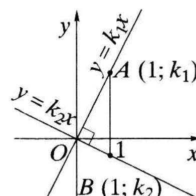
5. Įrodoma, kad tarpusavyje statmenų tiesių krypties koeficientų sandauga lygi -1.

   Pastaba. Pirmiausia įrodoma, kad dviejų statmenų tiesių, einančių per koordinačių pradžią, krypties koeficientų sandauga lygi -1 (punktas a), o iš to išplaukia, kad tai galioja ir bet kurioms dviem tarpusavyje statmenoms tiesėms (punktas b).

   Žodžiu suformuluojamas įrodytas teiginys ir tvirtinama, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys:

   Jeigu dviejų tiesių krypties koeficientų sandauga $k_1 \cdot k_2 = -1$, tai tos tiesės yra statmenos.

   Pateikiame šio teiginio įrodymą. Nagrinėkime $\triangle AOB$ (kaip ir a punkte).



   $OA^2 = 1 + k_1^2$, $OB^2 = 1 + k_2^2$, $AB^2 = (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 = k_1^2 + 2 + k_2^2$. Kadangi $OA^2 + OB^2 = AB^2$ (nes $1 + k_1^2 + 1 + k_2^2 = k_1^2 + 2 + k_2^2$), tai remdamiesi atvirkštine Pitagoro teorema gauname, kad $\triangle AOB$ — status. Vadinasi, tiesės $y = k_1x$, $y = k_2x$ yra statmenos.

6. Teigiama ir įrodoma, kad bet kurią plokštumos tiesę galima nusakyti lygtimi $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ arba $b \neq 0$).

   Pastaba. Įrodymas yra gana sudėtingas, todėl jį suprasti gali tik labai stiprūs mokiniai.

7. Išnagrinėjami atskiri bendrosios tiesės lygties $ax + by + c = 0$ atvejai:

   1) kai $a \neq 0$, $b \neq 0$, tai tiesė nėra lygiagreti nei vienai koordinačių ašiai;

   2) kai $a = 0$, $b \neq 0$, tai tiesė yra lygiagreti x ašiai;

   3) kai $a \neq 0$, $b = 0$, tai tiesė yra lygiagreti y ašiai.

8. Pateikta užduotis, siūlanti įsitikinti, kad tiesės, kurių lygtys $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$:

   - yra lygiagrečios, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
   - susikerta, kai $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
   - sutampa, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 90–102 pratimai; kartojimo — 103–110.

75, 101–112

90. *Nurodymas.* Reikia pastebėti, kad pavaizduotos tiesės yra lygiagrečios. Silpnesniems mokiniams pasiūlykite persibraižyti brėžinį ant languoto popieriaus.

a) Galima pastebėti, kad tiesės eina per langelių įstrižaines. Todėl iš karto aišku, kad jų krypties koeficientas yra -1.
Arba: galima pastebėti tris stačiuosius lygiašonius trikampius. Tuomet jų smailieji kampai yra po 45°. Taikant tiesių lygiagretumo požymį, galima tvirtinti, kad tiesės yra lygiagrečios.

b) Nubrėžkime tiesę, lygiagrečią duotosioms ir einančią per koordinačių pradžią. Nesunku pastebėti, kad ta tiesė eis per tašką $(-2; -3)$ (taip pat ir per taškus $(3; 4{,}5)$, $(-4; -6)$). Užrašome bendrąją tos tiesės lygtį $y = kx$. Kadangi tiesė eina per tašką $(-2; -3)$, tai to taško koordinatės tenkina tos tiesės lygtį, t. y. $-3 = k \cdot (-2)$, $k = \frac{3}{2}$.

c) kaip ir b) punkto atveju randame, kad $k = -2$.

Pastabos. 1) Mokiniai, kurie susipažino su praeitame skyrelyje įrodyta tiesės krypties koeficiento savybe, gali šį uždavinį išspręsti ir taip:

a) $k = -1$, nes $\frac{0-4}{4-0} = \frac{0-1}{1-0} = \frac{-3}{3} = -1$;

b) $k = 1{,}5$, nes $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$;

c) $k = -2$, nes $\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1} = \frac{-5}{2{,}5} = -2$.

2) Galima paprašyti nurodyti ir tų tiesių lygtis.

Su silpnesniais mokiniais šio uždavinio galima nenagrinėti. Geriausia būtų pakoreguoti sąlygą: ...raskite *lygiagrečių* tiesių...

91. a) ir d) lygiagrečios; b) susikerta; c) susikerta (statmenos).

92. a) A: $y = 3$; B: $y = 2$; C: $y = -2$; b) A: $x = 2$; B: $x = 4$;
c) A: $y = 2{,}5$; B: $x = 3$.

93. a) $k = 8$, $b \neq -1$; b) $k = 12$, $b \neq 5$; c) $k = 5$, $b \neq 7$; d) $k = 2$, $b \neq 11$.

94. a) $k \neq 6$; b) $k \neq 1$, b — bet koks skaičius; c) $k \neq 2{,}3$, b — bet koks skaičius; d) $k \neq 2\frac{1}{3}$, b — bet koks skaičius.

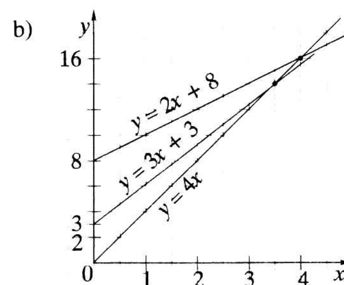
95. Nesunku matyti, kad nubrėžtos tiesės krypties koeficientas lygus 1 (analogiškai kaip 90a uždavinyje). Vadinasi, $y = x + b$. Į šią lygtį įrašę duotojo taško koordinates, rasime b reikšmę:
a) $1 = 2 + b$, $b = -1$; b) $-2 = -3 + b$, $b = 1$; c) $-4{,}5 = 0{,}5 + b$, $b = -5$.
Atsakymas. a) $y = x - 1$; b) $y = x + 1$; c) $y = x - 5$.

96. a) Tiesės a krypties koeficientas $k = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$, tiesės b krypties koeficientas $k = -1$. Tiesės a lygtis $y = x + 2$, tiesės b lygtis $y = -x$.
b) Tiesės a lygtis $y = 2x$, tiesės b lygtis $y = -\frac{1}{2}x + b$. Kadangi tiesė b eina per tašką, kurio koordinatės $(1; 2)$, tai teisinga lygybė: $2 = -\frac{1}{2} + b$, $b = 2\frac{1}{2}$. Tiesės b lygtis: $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.
c) Tiesės a lygtis: $y = \frac{2}{3}x + 2$; tiesės b lygtis: $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

97. a) $-\frac{1}{3}$;
b) $-\frac{3}{2}$; c) $1\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{4}$.

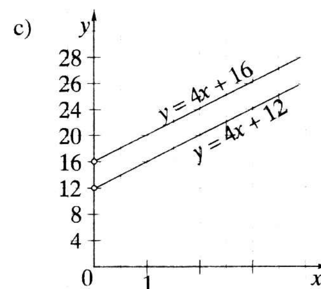
98. a) $P_{kv.}(x) = 4x$; $P_{st.}(x) = 2x + 8$; $P_{tr.}(x) = 3x + 3$.
c) $P_{st.}(6) = 20$; $P_{tr.}(6) = 21$; $P_{kv.}(6) = 24$.
d) $P_{st.}(2{,}5) = 13$; $P_{tr.}(2{,}5) = 10{,}5$; $P_{kv.}(2{,}5) = 10$.
e) Raskime x reikšmę, su kuria kvadrato perimetras lygus stačiakampio perimetrui: $2x + 8 = 4x$, $x = 4$. Tačiau kai $x = 4$, tai $P_{kv.}(4) = P_{st.}(4) \neq$ $\neq P_{tr.}(4)$. Duotųjų figūrų perimetrai negali būti lygūs.
Nurodymas. Atsakyti į klausimą galima ir remiantis grafikų tarpusavio padėtimi. Kadangi nėra taško, kuriame susikirstų visos trys tiesės, tai duotųjų figūrų perimetrai negali būti lygūs.

b)



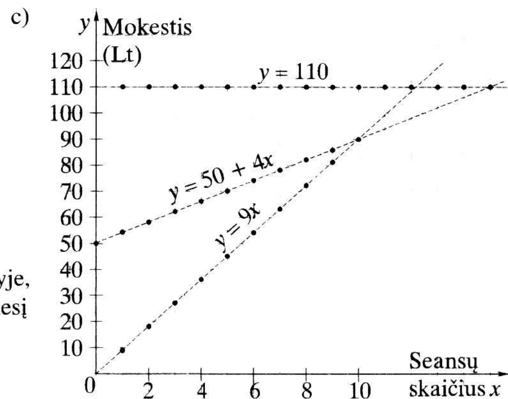
99. a) $f(x) = 4(x + 3) = 4x + 12$, $x > 0$;
$g(x) = 2(x + 1 + x + 7) = 4x + 16$, $x > 0$;
b) ne, nes $4x + 16 \neq 4x + 12$ su visomis x reikšmėmis.

c)



100. a) Kolonėlėje A: $1{,}8 \cdot 15 = 27$ (Lt);
kolonėlėje B: $1{,}65 \cdot 15 + 3 = 27{,}75$ (Lt);
b) kolonėlėje A: $1{,}8 \cdot 25 = 45$ (Lt);
kolonėlėje B: $1{,}65 \cdot 25 + 3 = 44{,}25$ (Lt);
c) $f(x) = 1{,}8x$, $x > 0$; $g(x) = 1{,}65x + 3$, $x > 0$;
e) kolonėlėje A: $1{,}8 - 1{,}8 \cdot 0{,}025 = 1{,}8 - 0{,}045 = 1{,}755 \approx 1{,}76$ (Lt);
kolonėlėje B: $3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$ (Lt);
f) $f_1(x) = 1{,}76x$; $g_1(x) = 1{,}65x + 1{,}8$.

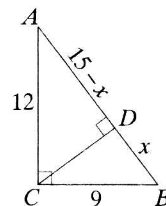
101. $f(x) = 50 + 4x$, $x \geqslant 0$, $x \in \boldsymbol{Z}$; $g(x) = 9x$, $x \in \boldsymbol{N}$.
a) $f(12) = 98$ Lt; $g(12) = 108$ Lt;
b) $f(5) = 70$ Lt; $g(5) = 45$ Lt;
c)



d) $a = 10$;
e) $f(a) = g(a) = 90$;
f) jeigu žiūrovas kino teatrą aplankys daugiau negu 10 kartų, tai jam verta įsigyti klubo nario pažymėjimą, o jeigu mažiau — neverta;
g) nenaudingas, nes $f(12) = 98 < 110$ ir $g(12) = 108 < 110$. Funkcijos $h(x) = 110$ grafikas nubraižytas c) punkto brėžinyje, iš kurio akivaizdžiai matosi, kad einant į kiną kartą per mėnesį (12 kartų per metus) garbės žiūrovo pažymėjimas yra nenaudingas.

102. a) $f(x) = 560 + 2{,}8x$; $g(x) = 350 + 4{,}2x$;
c) $350 + 4{,}2x > 560 + 2{,}8x$, $x > 150$. Taigi reikia nuvažiuoti daugiau negu 150 kilometrų. (Tai matyti ir iš grafiko.)

103. a) Kadangi $12^2 + 9^2 = 225 = 15^2$, tai trikampis yra status. Tuomet didžiausias kampas lygus $90°$.
b) $S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (cm^2).
c) $CD = \frac{2 \cdot 54}{15} = 7{,}2$ (cm).
d) Vienos atkarpos ilgį, pvz., BD, pažymėkime x.
Tuomet $x = \sqrt{9^2 - 7{,}2^2} = 5{,}4$ (cm); $AD = 9{,}6$ cm.



104. $\alpha + 132° = 180°$, $\alpha = 48°$; $\beta = 132°$.

105. a) $S_{\text{pagr}} = \frac{\pi d^2}{4} \approx \frac{3{,}14 \cdot 100}{4} = 78{,}5$ (cm^2);
b) $S_{\text{šon}} = \pi d h = 100\pi \approx 314$ (cm^2);
c) $S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}} \approx 314 + 2 \cdot 78{,}5 = 471$ (cm^2);
d) $V = S_{\text{pagr}} \cdot h \approx 78{,}5 \cdot 10 = 785$ (cm^3).

106. **B**, **D**, **E**.

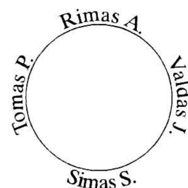
107. Miegamųjų vietų skaičių minkštajame vagone pažymėkime x. Sudarome lygtį: $x + 3x = 72$; $x = 18$.
Atsakymas. Minkštajame vagone yra 18 vietų, plackartiniame — 54 vietos.

108. a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$;
$(a - b)^2 = (b - a)^2$.
b) *Nurodymas.* Čia mokiniams galite pasiūlyti išvesti skirtumo kubo formulę:
$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

109. a) $(62 + 60 + 54 + 56 + 43 + 52) : 6 = 54{,}5$ (kg);
b) duomenis surašome variacine eilute: 43, 52, 54, 56, 60, 62; $\frac{54+56}{2} = 55$ (kg).

110. Samprotaujame taip:
1) Antanaitis yra arba Tomas, arba Rimas;
2) Rimas nėra Jonaitis ir Tomas nėra Jonaitis;
3) Petraitis yra arba Tomas, arba Valdas;
4) Saulaitis nėra Valdas ir Petraitis nėra Valdas.
Patogu sudaryti lentelę:

	Antanaitis	Jonaitis	Petraitis	Saulaitis
Tomas	–	–	+	–
Simas	–	–	–	+
Valdas	–	+	–	–
Rimas	+	–	–	–



Atsakymas. Rimas Antanaitis, Valdas Jonaitis, Tomas Petraitis, Simas Saulaitis.

Gali atrodyti keistai, kad funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, yra nagrinėjama „Tiesinės funkcijos“ skyriuje. Tai daroma dėl šių priežasčių:

1) siekiama funkcijas $f(x) = kx$ ir $f(x) = \frac{k}{x}$ nagrinėti viename skyriuje, kaip tai buvo daroma 8 klasėje — viename skyriuje nagrinėjamas ir dviejų dydžių tiesioginis, ir atvirkštinis proporcingumai;
2) siekiama parodyti ir panagrinėti funkciją, kurios grafikas *nėra tiesė*, o apibrėžimo ir reikšmių sritys *nesutampa* su realiųjų skaičių aibe;
3) kito skyriaus pabaigoje (2 skyrius, 7 skyrelis) bus rodoma, kaip grafiškai galima spręsti netiesines lygtis ir nelygybes (tarp jų ir racionaliąsias).

Funkciją $f(x) = \frac{k}{x}$, kai $k > 0$, galima vadinti atvirkštinio proporcingumo funkcija (nors proporcingumas apibrėžiamas tik teigiamiems dydžiams).

Svarbiausia šiame skyrelyje pasiekti, kad mokiniai atpažintų funkciją $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, ir mokėtų nubraižyti jos grafiką.

Pastaba. Su atvejais, kai kintamasis (kintamieji) yra reiškinio vardiklyje, mokiniai susidurs nagrinėdami racionaliuosius reiškinius ir racionaliąsias lygtis (Matematika 9, II dalis, 7 skyrius). Ten svarbiausia bus išmokyti *algebriškai* spręsti nesudėtingas racionaliąsias lygtis, kurios gaunamos sprendžiant tekstinius (paprastai darbo, judėjimo) uždavinius. Todėl su silpnesniais mokiniais šio skyrelio galima ir nenagrinėti.

Pakartoti:

kaip galima apibūdinti du atvirkščiai proporcingus dydžius;
kaip koordinačių plokštumoje yra išsidėstę atvirkščiai proporcingus dydžius vaizduojantys taškai;
faktą, kad dalyba iš nulio negalima (t. y. trupmena $\frac{a}{b}$ turi prasmę, kai $b \neq 0$);
simetriją taško atžvilgiu.

Išmokti:

atpažinti funkciją $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, ir nurodyti jos apibrėžimo ir reikšmių sritis;
nubraižyti funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, grafiką;
pagal koeficiento k ženklą nustatyti, kuriuose koordinatiniuose ketvirčiuose yra funkcijos grafikas.

Šiame skyrelyje:

1. Braižomas funkcijos $f(x) = \frac{8}{x}$ grafikas.

   Nurodymai. 1) Pirmiausia aptarkite funkcijos apibrėžimo sritį ir pastebėkite, jog kadangi x negali būti lygus 0, tai funkcijos grafikas nekerta y ašies.

   2) Pastebėkite, kad teigiamas x reikšmes atitinka teigiamos y reikšmės, o neigiamas — neigiamos. Vadinasi, funkcijos grafikas išsidėstęs I ir III ketvirčiuose.

   3) Pastebėkite, kad:
   - bet kurio hiperbolei $y = \frac{k}{x}$ priklausančio taško koordinačių sandauga yra pastovus skaičius, lygus k ($xy = k$, $k \neq 0$).
   - kuo *didesnė teigiama* x reikšmė, tuo *mažesnė* atitinkama y reikšmė. Pavyzdžiui, kai $x = 10$, tai $y = 0{,}8$; kai $x = 100$, tai $y = 0{,}08$ ir t. t. Vadinasi, grafiko taškai *didėjant teigiamai* x koordinatei artėja prie x ašies;
   - kuo *mažesnė teigiama* x reikšmė, tuo *didesnė* atitinkama y reikšmė. Pavyzdžiui, kai $x = 0{,}1$, tai $y = 80$; kai $x = 0{,}01$, tai $y = 800$ ir t. t. Vadinasi, grafiko taškai *mažėjant teigiamai* x koordinatei artėja prie y ašies.

   4) Analogiškai šių nurodymų 3 punktui, panagrinėkite neigiamąsias x reikšmes.

   5) Aptarkite funkcijos reikšmių sritį ir pastebėkite, kad nėra tokios x reikšmės, su kuria y reikšmė būtų lygi 0. Vadinasi, grafikas nekerta x ašies.

   6) Pastebėkite, kad funkcijos reikšmės mažėja kiekviename iš intervalų $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$.

   7) Atkreipkite dėmesį, kad funkcija yra nelyginė ($f(-x) = -f(x)$). Jos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

2. Pateikiama užduotis, mokiniams patiems nubraižyti funkcijos $f(x) = \frac{-8}{x}$ grafiką.

   Nurodymas. Patyrinėkite funkciją $f(x) = \frac{-8}{x}$, panašiai kaip ir funkciją $f(x) = \frac{8}{x}$.

3. Pavaizduoti funkcijų $f(x) = \frac{k}{x}$ grafikai, kai $k > 0$ ir kai $k < 0$, ir išvardijamos jų pagrindinės savybės.

   Nurodymai. 1) Paprašykite mokinių kiekvienu atveju nurodyti reikšmių didėjimo (mažėjimo) intervalus.

   2) Paaiškinkite, kaip braižyti funkcijos $y = \frac{k}{x}$ scheminį grafiką.

   Nubraižykime scheminį grafiką, pavyzdžiui, funkcijos $y = -\frac{3{,}4}{x}$. Kadangi funkcija yra pavidalo $f(x) = \frac{k}{x}$ ir $k < 0$, tai jos grafikas yra hiperbolė, kurios šakos yra II ir IV ketvirčiuose. Pasirinkę, pavyzdžiui, $x_1 = 1$ ir $x_2 = 3{,}4$, randame $y_1 = -3{,}4$ ir $y_2 = -1$. Koordinačių plokštumoje pažymėję taškus $(1; -3{,}4)$, $(3{,}4; -1)$ ir per juos glodžiai nubrėžę kreivę, gauname vieną hiperbolės šaką. Pasinaudoję funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$ grafiko simetriškumu taško $(0; 0)$ atžvilgiu, pažymime taškus $(-1; 3{,}4)$, $(-3{,}4; 1)$ ir juos sujungiame glodžia kreive. Gauname antrą hiperbolės šaką. Hiperbolė apytiksliai nubraižyta.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 111–122, 124 pratimai; kartojimui — 123, 125–132.

113–118

111. a) $k = 1\cdot 3 = 3$; b) $k = -3\cdot 2 = -6$; c) $k = -2\cdot 1 = -2$; d) $k = 3\cdot 3 = 9$.
Pastaba. Verta pasinaudoti savybe $y \cdot x = k$.

112. Punktuose a) ir c) hiperbolė bus I ir III ketvirčiuose, o b) ir d) — II ir IV.

113. Nubraižę grafikus mokiniai turėtų pastebėti, kad kuo didesnė koeficiento k modulio reikšmė, tuo toliau nuo koordinačių ašių yra hiperbolės taškai.

114. Braižant scheminį funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$ grafiką svarbu teisingai nustatyti, kuriuose ketvirčiuose yra hiperbolė: a) ir c) — I ir III; b) ir d) — II ir IV.

115. a) 5 h; ≈ 3 h 45 min; 3 h; b) 100 km/h; ≈ 75 km/h; ≈ 120 km/h; c) 300 km.

116. a) $v = \frac{600}{t}$, $t > 0$; b) $t = \frac{600}{v}$, $v > 0$;

117. a) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; b) $-\frac{3}{4}$; $-1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; c) -1; $-1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; 1; d) kai $x < 0$; e) funkcijos reikšmės mažėja abiejuose apibrėžimo srities intervaluose.

Nurodymas. Sprendžiant b ir c punktus, patogu remtis savybe $xy = 3$.

118. a) $k = -16\cdot(-0{,}5) = 8$; b) $k = -0{,}5\cdot 4 = -2$;
c) $k = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$; d) $k = 5\cdot 2{,}4 = 12$.

Nurodymas. Jeigu $x = a$, o $f(x) = \frac{k}{x}$, tai $k = a \cdot f(a)$.

119. Nubraižius funkcijos $f(x) = -\frac{2}{x}$ grafiką, patarkite mokiniams nubrėžti tieses: a) $y = 0$, b) $y = -2$, c) $y = -6$. Nesunku nustatyti, kad reikiamos x reikšmės priklauso intervalams: a) $(-\infty; 0)$; b) $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$; c) $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. (Stipresnių mokinių galima paprašyti nurodyti šiuos intervalus.)

120. a) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$, $(0; +\infty)$; b) $(0; 2)$; c) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, $(0; +\infty)$.

121. a) Taip, nes $6\cdot 21 = 126$; b) taip, nes $-3\cdot(-42) = 126$;
c) ne, nes reiškinys $\frac{126}{0}$ neturi prasmės; d) ne, nes $-9\cdot 14 \neq 126$.

Nurodymas. Jeigu $x = a$, o $f(x) = \frac{k}{x}$, tai $k = a \cdot f(a)$.

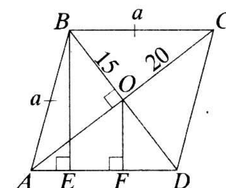
122. b) — taip; a), c), d) — ne.

123. Skridimo kelias $s = 2\pi R \approx 8000\pi$ mylių. Skridimo laikas $t = \frac{s}{v} \approx \frac{8000\pi}{500} =$ $= 16\pi$ valandų. $16\cdot 3 < t < 16\cdot 3{,}2$; $48 < t < 51{,}2$.

Atsakymas. **C.**

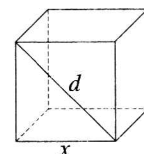
124. a) $(-2; -6)$ ir $(2; 6)$.
b) Funkcijos $f(x) = \frac{12}{x}$ reikšmės teigiamos, kai $x > 0$; neigiamos, kai $x < 0$; funkcijos reikšmės mažėja intervaluose: $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$.

125. a) $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$ (čia d_1, d_2 – rombo įstrižainės);$S = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40 = 600\,(\text{cm}^2)$;
b) $a = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\,(\text{cm})$, $P = 4a = 100\,\text{cm}$;
c) $S = AD\cdot BE$; $BE = S : a = 600 : 25 = 24\,(\text{cm})$;
d) atstumas nuo įstrižainių susikirtimo taško iki kraštinės lygus pusei aukštinės, t. y. $24 : 2 = 12\,(\text{cm})$.



126. Remdamiesi trikampio priekampio savybe gauname: $\alpha + 77° = 134°$, $\alpha = 57°$.

127. a) x — kubo briauna, d — kubo sienos įstrižainė;
I būdas. $d^2 = 2x^2$; $(3\sqrt{2})^2 = 2x^2$; $x = 3\,\text{cm}$; $V = x^3 = 27\,(\text{cm}^3)$.
II būdas. $d^2 = 2x^2$; $x^2 = \frac{d^2}{2}$; $x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$;
$V = \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{d^3\sqrt{2}}{4} = \frac{(3\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2}}{4} = 27\,(\text{cm}^3)$;
b) x — kubo briauna, a — kubo sienos įstrižainė;
$V = x^3 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}\,(\text{cm}^3)$.



128. a) $\frac{5}{16}$; b) $-\frac{3}{16}$; c) $\frac{1}{64}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{1}{8}$; f) $\frac{1}{128}$.

129. $4(2a^2 - a + 25)$; 320.

Atsakymas. **A.**

130. a) $(x + x + 40)\cdot 0{,}4 = 32$, $x = 20$; b) $(x + x - 40)\cdot 0{,}4 = 32$, $x = 60$.

$24\,\text{min} = \frac{24}{60}\,\text{h} = \frac{2}{5}\,\text{h} = 0{,}4\,\text{h}.$

Atsakymas. Motorinės valties greitis yra 20 km/h, katerio — 60 km/h.

131. Iš 3 dalijasi tie skaičiai, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 3. Vadinasi, skaičiai negali būti sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 4 ir 1, 3, 4 (nes jų suma nėra dali iš trijų). Taigi skaičiai gali būti sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3 arba 2, 3, 4:
123; 132; 213; 231; 234; 243; 312; 321; 324; 342; 423; 432.

Atsakymas. **C.**

132. Petras įpylė grietinėlės tiek, kiek išgėrė gėrimo iš puodelio: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6}{6} = 1$.
Atsakymas. Petras kavos ir grietinėlės išgėrė po lygiai.

2. KVADRATINĖ FUNKCIJA

Šis skyrius yra gana platus ir pateiktas netradiciškai. Todėl labai svarbu, kad mokytojas gerai suprastų šio skyriaus ypatumus ir tikslus. Aptarkime juos:

1. ***Anksčiau*** kvadratinė funkcija buvo nagrinėjama išmokus spręsti pilnąją kvadratinę lygtį.
   Dabar mokiniai yra susipažinę tik su nepilnųjų kvadratinių lygčių sprendimu. (Kvadratinės lygtys išsamiai bus nagrinėjamos 5 skyriuje.)
2. ***Anksčiau*** kvadratinė funkcija buvo nagrinėjama taip:
   1) braižomas funkcijos $y = x^2$ grafikas (remiantis reikšmių lentele). Gautoji kreivė pavadinama parabole;
   2) braižomas funkcijos $y = ax^2$, $a \neq 0$, grafikas. Padaroma išvada, kad funkcijos $y = ax^2$ grafiką galima gauti parabolę $y = x^2$ tempiant (kai $a > 1$), spaudžiant (kai $0 < a < 1$) ir atlikus simetriją x ašies atžvilgiu (kai $a < 0$). Sutariama kiekvienos funkcijos $y = ax^2$ ($a \neq 0$) grafiką taip pat vadinti parabole;
   3) braižomas funkcijos $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, grafikas. Daroma išvada, kad tos funkcijos grafiką galima gauti lygiagrečiai pastūmus parabolę $y = ax^2$ taip, kad jos viršūnė būtų taške, kurio koordinatės $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Čia mokiniams tekdavo arba įsiminti parabolės viršūnės koordinates nusakančias formules, arba suteikus funkcijai pavidalą $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ (išskyrus dvinario kvadratą), norimą grafiką gauti lygiagrečiai pastūmus parabolę $y = ax^2$ per $\frac{b}{2a}$ ir $\frac{b^2-4ac}{4a}$ vienetų atitinkamai x ir y ašimis.

   Dabar kvadratinė funkcija nagrinėjama taip:
   1) braižomas funkcijos $y = x^2$ grafikas (remiantis reikšmių lentele). Pasakoma, kad funkcijų, kurių pavidalas yra $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, grafikas vadinamas parabole (2.2 skyrelis);
   2) braižoma parabolė $y = ax^2$, $a \neq 1$. Atkreipiamas dėmesys, kur priklausomai nuo koeficiento a ženklo yra nukreiptos parabolės šakos (2.2 skyrelis), į viršūnės koordinates ir simetrijos ašį;
   3) braižoma parabolė $y = ax^2 + c$, $c \neq 0$. Daroma išvada, kad šią parabolę galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2$ y ašimi atstumu $|c|$ (2.3 skyrelis). Dėl šio veiksmo simetrijos ašis išlieka ta pati (Oy ašis), o viršūnės koordinatės tampa $(0; c)$;
   4) braižoma parabolė $y = ax^2+bx$, $b \neq 0$ (remiantis reikšmių lentele). Sudarant lentelę, argumento reikšmės imamos ne bet kaip, o simetriškos ašies $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu; taip pat imamas ir skaičius $x = -\frac{b}{2a}$.
   5) braižoma parabolė $y = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Daroma išvada, kad šią parabolę galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2 + bx$ lygiagrečiai y ašiai atstumu $|c|$ (2.6 skyrelis).

   Pastabos. 1) 2.4 skyrelyje nagrinėjamas parabolės $y = ax^2$ horizontalus lygiagretusis postūmis $y = a(x-m)^2$ ir po to — vertikalus lygiagretusis postūmis $y = a(x-m)^2+n$. Tai padaryta tam, kad 2.5 skyrelyje būtų galima įrodyti, jog funkcijos $y = ax^2 + bx$ grafikas yra parabolė, gauta pastūmus parabolę $y = ax^2$ lygiagrečiai koordinačių ašims.
   2) 2.2–2.5 skyreliai — tai tarsi laipteliai, vedantys į pagrindinį tikslą — pilnos kvadratinės funkcijos grafiko braižymą. Tais laipteliais galima žengti lėčiau, galima sparčiau. Daug paauglių niekaip neįstengia lipti laiptais lėtai, ramiai. Jiems norisi kuo greičiau užlėkti į viršų, pasiekti tikslą. Norint paspartinti temos nagrinėjimą:
   - nebūtina spręsti visus kiekvieno skyrelio pratimus;
   - per tris-keturias pamokas vertėtų išsiaiškinti, nuo ko priklauso parabolės šakų kryptis; kaip apskaičiuojamos viršūnės koordinatės; kokia tiesė yra simetrijos ašimi; kokia kryptimi konkrečiu atveju stumiama parabolė;
   - o tada pereiti prie pilnos kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiko.

   Panagrinėkime tokią pavyzdžių seką:
   1) $f(x) = 2x^2$. Parabolės $y = 2x^2$ šakos nukreiptos aukštyn; viršūnės koordinatės $(0; 0)$; simetrijos ašis — ordinačių ašis;
   2) $f(x) = 2x^2 + 3$. Parabolės $y = 2x^2 + 3$ forma ir šakų kryptis tokia pati kaip parabolės $y = 2x^2$; viršūnės koordinatės $(0; 3)$; simetrijos ašis — ordinačių ašis;
   3) $f(x) = 2(x - 1)^2$. Parabolės $y = 2(x - 1)^2$ forma ir šakų kryptis tokia pati kaip parabolės $y = 2x^2$; viršūnės koordinatės $(1; 0)$; simetrijos ašis — tiesė $x = 1$;
   4) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$. Parabolės $y = 2(x - 1)^2 + 3$ forma ir šakų kryptis tokia pati kaip parabolės $y = 2x^2$; viršūnės koordinatės $(1; 3)$; simetrijos ašis — tiesė $x = 1$. Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, gauname $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ ir žinome, kad funkcijos grafikas yra parabolė $y = 2x^2$, pastumta per vieną vienetinę atkarpą į dešinę ir per tris vienetines atkarpas į viršų.
   Atkreipkime dėmesį, kad funkcijos $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ grafiką galima gauti ir kitu būdu — funkcijos $g(x) = 2x^2 - 4x$ grafiką pastūmus išilgai Oy ašies per penkias vienetines atkarpas.
   5) Dabar pereikime prie funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$. Braižant jos grafiką, reikėtų funkcijai suteikti išraišką $f(x) = a(x+m)^2+n$ arba $f(x) = (ax^2+bx)+c$. Einant antruoju keliu, funkcijos $g(x) = ax^2+bx$ grafiką reikėtų pastumti per $|c|$ išilgai ordinačių ašies į viršų, kai $c > 0$, arba žemyn, kai $c < 0$.
   Vadovėlio 2.5 skyrelyje parodyta, kad $g(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$. Darome išvadą, kad funkcijos $g(x) = ax^2+bx$

grafikas yra parabolė $y = ax^2$, kurios viršūnės abscisė $x_0 = -\frac{b}{2a}$, simetrijos ašis — tiesė $x = -\frac{b}{2a}$, ordinatė $y_0 = f(x_0) = -\frac{b^2}{4a}$. Nebūtina atsiminti, kad parabolės viršūnės ordinatė $y_0 = -\frac{b^2}{4a}$, nes ją nesunku apskaičiuoti: $y_0 = f(x_0)$. Praktiškai dauguma mokinių gerai ir noriai įsimena viršūnės abscisės formulę $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ir neretai rodo nepasitenkinimą, jeigu ta formulė duodama vėliau, jų nuomone — per vėlai. Naudinga funkcijų $g(x) = ax^2 + bx$ ir $g(x) = ax^2 + bx + c$ grafikų braižymo eigą lentelėje sugretinti:

Funkcija	$g(x) = ax^2 + bx$	$g(x) = ax^2 + bx + c$
Šakų kryptis	$a > 0$ — aukštyn, $a < 0$ — žemyn.	$a > 0$ — aukštyn, $a < 0$ — žemyn.
Viršūnės koordinatės	$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$.	$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$.
Simetrijos ašis	Tiesė $x = -\frac{b}{2a}$.	Tiesė $x = -\frac{b}{2a}$.
Papildomi taškai	Randame abscises taškų, kuriuose parabolė kerta Ox ašį: $ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x = 0$ ir $x = -\frac{b}{a}$. 1) Taigi parabolė kerta Ox ašį taškuose, kurių koordinatės yra $(0; 0)$ ir $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$. 2) Ką mums duoda tie surastieji parabolės taškai? Kadangi parabolė turi simetrijos ašį, o ta tiesė visada yra statmena Ox ašiai, tai akivaizdu, kad taškai $(0; 0)$ ir $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ yra simetriški parabolės simetrijos ašies atžvilgiu. Akivaizdu, kad simetrijos ašis kirs Ox ašį pusiaukelėje tarp taškų 0 ir $-\frac{b}{a}$. Vadinasi, ji eis per tašką $\frac{0+(-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a}$. Parabolės viršūnė priklauso simetrijos ašiai, todėl viršūnės x koordinatė yra $-\frac{b}{2a}$. Viršūnės y koordinatę randame iš parabolės formulės: $g(-\frac{b}{2a}) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. 3) Kad būtų lengviau braižyti parabolę, savo nuožiūra galima pasirinkti „patogią“ reikšmę x_1 ir apskaičiuoti atitinkamą y_1 reikšmę. Tada pažymėti tašką $(x_1; y_1)$ ir jam simetrišką tašką tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu.	1) Parabolė eina per taškus $(0; 0 + c)$, $\left(-\frac{b}{a}; 0 + c\right)$, $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a} + c\right)$. 2) Kad būtų lengviau braižyti parabolę, savo nuožiūra galima pasirinkti „patogią“ reikšmę x_1 ir apskaičiuoti atitinkamą y_1 reikšmę. Tada pažymėti tašką $(x_1; y_1)$ ir jam simetrišką tašką tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu.

Funkcija $g(x) = ax^2 + bx$ verta atskiro dėmesio, nes sprendžiant praktinio turinio uždavinius ji sudaroma pakankamai dažnai ir gal net dažniau negu kiti kvadratinės funkcijos atvejai.

3) Mokytojai gali pirmiausia išmokyti mokinius algebriškai spręsti kvadratines lygtis, o po to nagrinėti kvadratinę funkciją (kaip buvo mokoma anksčiau).

Taigi šiame skyriuje yra du netradiciniai momentai:

- kvadratinės funkcijos grafikas tyrinėjamas *anksčiau*, negu mokoma spręsti pilnąsias kvadratines lygtis;
- pilnosios kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikas braižomas *remiantis* funkcijos $g(x) = ax^2 + bx$ grafiku.

Nurodymai. 1) Pagrindinis dėmesys turėtų būti skiriamas funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiko braižymui ir nagrinėjimui, o ne analiziniam tos funkcijos tyrimui.

2) Svarbus yra paskutinis šio skyriaus skyrelis (2.7 skyrelis). Čia pakartojami visų iki šiol nagrinėtų funkcijų grafikai ir parodoma, kaip remiantis jais galima grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes.

Minimalus lygmuo:

1. Atpažinti kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ir gebėti paprastais atvejais nubraižyti jos grafiką.
2. Pagal koeficiento a ženklą nustatyti, kur nukreiptos parabolės $y = ax^2 + bx + c$ šakos.
3. Suprasti funkcijų grafikų bendrų taškų savybę (tuose taškuose funkcijos reikšmės yra lygios).

Pagrindinis lygmuo:

4. Remiantis kvadratinės funkcijos grafiku gebėti nustatyti jos reikšmių sritį; didėjimo ir mažėjimo intervalus; didžiausią (mažiausią) funkcijos reikšmę; intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės yra teigiamos, kuriuose — neigiamos.
5. Gebėti nustatyti kvadratinės funkcijos grafiko (parabolės) simetrijos ašį ir viršūnės koordinates.
6. Gebėti remtis funkcijų $f(x) = kx + b$, $g(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikais sprendžiant lygtis.

Aukštesnis lygmuo:

7. Remiantis kvadratinės funkcijos grafiku gebėti užrašyti ją atitinkančią formulę.
8. Gebėti grafiškai spręsti paprasčiausias kvadratines nelygybes.

2.1. Kvadratinės funkcijos apibrėžimas

Skyrelyje nagrinėjant realius pavyzdžius parodoma, kad dviejų dydžių priklausomybei išreikšti prireikia funkcijų, kurių aukščiausias nepriklausomo kintamojo laipsnis lygus 2. Tokios funkcijos vadinamos kvadratinėmis. Svarbiausia šiame skyrelyje pasiekti, kad mokiniai iš formulės atpažintų kvadratinę funkciją.

Pakartoti:

funkcijos sąvoką;
ką vadiname funkcijos apibrėžimo sritimi ir reikšmių sritimi.

Išmokti:

formulę, kuria išreiškiama kvadratinė funkcija;
apskaičiuoti kvadratinės funkcijos reikšmę, kai duota argumento reikšmė.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami du su realiu gyvenimu susiję pavyzdžiai, kuriuose dviejų dydžių priklausomybė užrašoma kvadratine funkcija.

Pastaba. Mokytojas gali pateikti ir kitų pavyzdžių. Bet būtų gerai, kad tie pavyzdžiai sietųsi su realiu gyvenimu.

2. Pasakoma, kokia funkcija vadinama kvadratine:

Funkcija, kurią galima užrašyti formule $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, vadinama kvadratine.

Nurodymai. 1) Mokiniams pabrėžkite, kad kvadratinės funkcijos nepriklausomo kintamojo aukščiausias laipsnis lygus 2.

2) Pastebėkite, kad kvadratinės funkcijos koeficientai b ir c gali būti lygūs nuliui (jei koeficientas a lygus 0, tai turėsime tiesinę funkciją).

3) Būtinai aptarkite, kokia yra kvadratinės funkcijos apibrėžimo sritis. Svarbu atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad sprendžiant realaus turinio uždavinį dažniausiai apibrėžimo sritis yra siauresnė negu visa realiųjų skaičių aibė. Tai matome iš nagrinėtų pavyzdžių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 133–146 pratimai; kartojimui — 147–153 pratimai.
Pastabos. 1) Sprendžiant teminius pratimus (138, 140–142, 145, 146) reikės prisiminti trikampio, kvadrato ir stačiakampio ploto bei ritinio tūrio formules.
2) Šie išvardyti uždaviniai skirti kvadratinės funkcijos sudarymui. Juos galima spręsti vėliau ir nebūtinai visus. 1–12

133. a), c), e) — taip; b), d), f) — ne.

134. a) $a = 5$, $b = 2$, $c = -1$; b) $a = 8$, $b = -2$, $c = 0$;
c) $a = -4$, $b = 0$, $c = 1$; d) $a = \frac{2}{3}$, $b = 3$, $c = -2$.

135. a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 7$; b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$;
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$; d) $f(x) = x^2$.

136. a) $f(3) = 9$; b) $f(1) = 1$; c) $f(-6) = 36$; d) $f(4) = 16$; e) $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$;
f) $f(a) = a^2$; g) $f(2a) = 4a^2$; h) $f(2-a) = 4 - 4a + a^2$.

137. a) $f(1) = 6$; b) $f(-1) = 2$; c) $f(-3) = 6$; d) $f(-1-a) = a^2 + 2$;
e) $f(a-1) = a^2 + 2$; f) $f(b-2) = b^2 - 2b + 3$;
g) $f(x-3) = x^2 - 4x + 6$; h) $f(-b) = b^2 - 2b + 3$.

138. Nepriklausomą kintamąjį pažymėkime x.
a) $y = x^2$; $a = 1$, $b = c = 0$;
b) $y = \frac{1}{2}x^2$; $a = \frac{1}{2}$, $b = c = 0$;
c) $y = 2x^2$; $a = 2$, $b = c = 0$.

139. $s = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{5}$; greitis v (km/h) — nepriklausomas kintamasis,
stabdymo kelias s(m) — priklausomas kintamasis;
$a = \frac{1}{200}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = 0$.
Nurodymas. Paprašykite mokinių apskaičiuoti stabdymo kelią, kai važiavimo greitis $v = 10$ km/h; 50 km/h; 100 km/h.

140. Likusio kvadrato plotas $I = (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ (kvadratinių vienetų);
$a = 1$, $b = -2$, $c = 1$.

141. Trikampio plotą pažymėkime S.
$S = \frac{x(x+3)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}$ (kvadratinių vienetų); $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 0$.

142. Vienos stačiakampio kraštinės ilgis lygus $\frac{P}{3}$, gretimos — $\left(P - \frac{2P}{3}\right) : 2 = \frac{P}{6}$.
Stačiakampio plotas $S = \frac{P}{3} \cdot \frac{P}{6} = \frac{P^2}{18}$; $a = \frac{1}{18}$, $b = 0$, $c = 0$.

143. Apytiksliai po 10,6 sekundės.

144. a) Funkcija kvadratinė: $E(v) = 100v^2$; $a = 100$, $b = c = 0$.
b) Funkcija kvadratinė: $E(v) = 27v^2$; $a = 27$, $b = c = 0$.
c) $E(v) = 0{,}05v^2 = 0{,}05\,\mathrm{g} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 0{,}05 \cdot \frac{\mathrm{g\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$.

145. $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Funkcija yra kvadratinė.

146. $V(x) = 5\pi x^2$.

147. a) 0,4 m; b) $0{,}12\,\mathrm{m}^2$; c) 0,48 m; d) 5 : 6 : 6; e) $83\frac{1}{3}\%$; f) 120%.

148. a) 30°; b) 90°; c) 120°; d) 165°.

149. a) Verta atskliausti ir atlikti veiksmus iš eilės:
$12\frac{7}{11} + 4\frac{4}{11} - 2\frac{2}{7} = 17 - 2\frac{2}{7} = 14\frac{5}{7}$;
b) verta atskliausti ir pergrupuoti narius:
$\left(3\frac{12}{17} - 2\frac{12}{17}\right) + 4\frac{8}{21} = 1 + 4\frac{8}{21} = 5\frac{8}{21}$.

150. 129 puslapiai.

151. A.

152. a) $10 < 2\sqrt{30}$, nes $2\sqrt{30} = \sqrt{2^2 \cdot 30} = \sqrt{120} > 10$;
b) $5\sqrt{2} > 7$, nes $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > 7$.

153. Tarkime, kad valstietė atnešė į turgų x kiaušinių. Pirmasis pirkėjas nupirko $\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, o antrasis – $\left(\frac{x}{2} - 1\right) : 2 + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ kiaušinių. Abu pirmieji pirkėjai nupirko $\frac{3x}{4} + 1\frac{1}{2}$ kiaušinių. Trečiasis pirkėjas nupirko $\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}\right) : 2 + 1 = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$ kiaušinių.
Sudarome lygtį: $\frac{3x}{4} + 1\frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4} + 10 = x$; $x = 94$.
Atsakymas. a) 94; b) I pirkėjas nupirko 48 kiaušinius, II — 24, III — 12.

Šis uždavinys — senovinio uždavinio viena variacijų. Todėl gal kiek ir keisti kiekvieno pirkėjo pirktų kiaušinių skaičiai: 48, 24 ir 12 – (4 tuzinai, 2 tuzinai ir 1 tuzinas).

Tai atskiras funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ atvejis, kai $b = c = 0$. Kadangi grafikas suteikia daug informacijos apie funkciją, tai stengiamasi jį kuo greičiau nubraižyti. Suprantama, kad negalime kaip reikiant algebriškai ištirti funkcijos savybių, kurios reikalingos braižant grafiką. Todėl tiesiog sudaroma funkcijos reikšmių lentelė, kuria remiantis koordinačių plokštumoje žymimi taškai ir per juos glodžiai brėžiama kreivė.

Skyrelio teorinės medžiagos struktūra yra tokia:

1. Braižomas funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas ($a = 1$).
2. Braižomi funkcijų $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($0 < a < 1$) ir $f(x) = 2x^2$ ($a > 1$) grafikai.
3. Braižomi funkcijų $f(x) = -x^2$ ($a = -1$), $f(x) = -2x^2$ ($a < -1$) ir $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ ($-1 < a < 0$) grafikai.

Pastabos. 1) Vadovėlyje neakcentuojamos funkcijos $f(x) = ax^2$ savybės. Pagrindinis dėmesys skiriamas parabolės $y = ax^2$ nagrinėjimui. Svarbiausia, kad mokiniai mokėtų nubraižyti parabolę $y = ax^2$.

2) Pasakykite mokiniams, kad *visų* kvadratinių funkcijų $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, grafikai vadinami parabolėmis.

Pakartoti:

kaip remiantis grafiku randama funkcijos reikšmė, kai žinoma argumento reikšmė, ir atvirkščiai;

kaip remiantis formule apskaičiuojama funkcijos reikšmė, kai duota argumento reikšmė;

kaip remiantis grafiku nustatoma funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys, didėjimo ir mažėjimo intervalai, didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė;

kaip nustatoma, ar taškas, kurio koordinatės duotos, priklauso grafikui funkcijos, užrašytos formule;

kokios funkcijos vadinamos lyginėmis ir kuo pasižymi lyginių funkcijų grafikai;

simetriją tiesės atžvilgiu.

Išmokti:

nurodyti parabolės $y = ax^2$ simetrijos ašį ir viršūnės koordinates;

sudaryti funkcijos $f(x) = ax^2$ reikšmių lentelę ir remiantis ja nubraižyti parabolę $y = ax^2$;

paaiškinti, kaip nuo koeficiento a ženklo priklauso parabolės $y = ax^2$ šakų kryptis;

remiantis parabolės $y = ax^2$ grafiku nurodyti funkcijos $f(x) = ax^2$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo ir mažėjimo intervalus, didžiausią (mažiausią) funkcijos reikšmę ir tašką, kuriame funkcija tą reikšmę įgyja;

kvadratinės funkcijos grafiko pavadinimą.

Šiame skyrelyje:

1. Braižomas funkcijos $f(x) = ax^2$ grafikas, kai $a = 1$.

   Pastabos. 1) Visi mokiniai turi išmokti sudaryti funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmių lentelę ir remdamiesi ja nubraižyti grafiką. Sudarant lentelę argumento reikšmes patogu imti simetriškas taško (0; 0) atžvilgiu ir reikšmę, lygią 0.

   2) Visi mokiniai turi žinoti, kad parabolė $y = x^2$ yra simetriška y ašies atžvilgiu. (Stipresniesiems mokiniams galima pasiūlyti įrodyti, kad funkcija $f(x) = x^2$ yra lyginė.)

   3) Remiantis parabole $y = x^2$ mokiniai (išskyrus silpniausius) turi mokėti nustatyti funkcijos $f(x) = x^2$ apibrėžimo ir reikšmių sritis; didėjimo ir mažėjimo intervalus; tašką, kuriame funkcija įgyja mažiausią reikšmę.

2. Braižomi funkcijų $f(x) = ax^2$ grafikai, kai $a > 0$.

   Nurodymai. 1) Vadovėlyje parabolės $y = ax^2$, kai $a = 2$; $\frac{1}{2}$, braižomos kartu su parabole $y = x^2$, siekiant parodyti, kad kai $a > 0$:
   - tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn;
   - parabolės viršūnė yra taške (0; 0);
   - parabolės yra simetriškos y ašies atžvilgiu;
   - kuo a reikšmė didesnė, tuo parabolės šakos yra arčiau y ašies;
   - funkcija $f(x) = ax^2$ taške (0; 0) įgyja mažiausią reikšmę.

   2) Galima paprašyti mokinių nurodyti pagrindines funkcijos $f(x) = ax^2$, kai $a > 0$, savybes.

   Pastaba. Užduotį naudinga atlikti kompiuterių klasėje, stebėti parabolės kitimą kintant koeficiento a reikšmės didumui ir ženklui.

3. Braižomi funkcijų $f(x) = ax^2$ grafikai, kai $a < 0$.

   Nurodymai. 1) Vadovėlyje parabolės $y = ax^2$, kai $a = -1$; -2; $-\frac{1}{2}$, braižomos viename brėžinyje, siekiant parodyti, kad kai $a < 0$:
   - tai parabolės šakos nukreiptos žemyn;
   - parabolės viršūnė yra taške (0; 0);
   - parabolė yra simetriška y ašies atžvilgiu;
   - kuo a reikšmė mažesnė, tuo parabolės šakos yra arčiau y ašies;
   - kai a yra vienas kitam priešingi skaičiai, tai parabolės yra simetriškos x ašies atžvilgiu;
   - funkcija $f(x) = ax^2$ taške (0; 0) įgyja didžiausią reikšmę.

   2) Galima paprašyti mokinių nurodyti pagrindines funkcijos $f(x) = ax^2$, kai $a < 0$, savybes.

   3) Stipresnieji mokiniai galėtų įrodyti, kad funkcija $f(x) = ax^2$ yra lyginė.

4. Įrėmintame mėlyname stačiakampyje trumpai apibūdinamos parabolės $y = ax^2$ ypatybės.

   Pastaba. Galima liepti mokiniams papildyti stačiakampį nurodant funkcijos $f(x) = ax^2$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo ir mažėjimo intervalus (priklausomai nuo a ženklo).

5. Pateiktas pavyzdys, kaip braižyti scheminį funkcijos $y = ax^2$ grafiką (žr. taip pat 160 užd.).

Šiai temai skirti 154–169 pratimai; kartojimui — 170–176 pratimai. 13–22, 78–95

154. a) 4; b) −7; c) $-\frac{1}{6}$; d) 1,13; e) $\frac{19}{3}$; f) $-\frac{3}{13}$.

155. a) $f(1) = 2$;
b) $f(3) = 18$;
c) $f(-0,5) = 0,5$;
d) $f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{8}$;
e) $f(a) = 2a^2$;
f) $f(3a) = 18a^2$.

156. a) $\approx 2,3$; $\approx 1,6$;
b) $\approx -3,5$ arba $\approx 3,5$; $\approx -4,2$ arba $\approx 4,2$;
c) funkcijos reikšmės mažėja intervale $(-\infty; 0)$, didėja intervale $(0; +\infty)$;
d) mažiausia funkcijos reikšmė lygi 0, didžiausios reikšmės nustatyti negalima, funkcijos reikšmės neribotai didėja, kai x artėja į $-\infty$ arba į $+\infty$.

157. a) $\approx -1,1$; $\approx -4,5$;
b) $\approx -3,2$ arba $\approx 3,2$; $\approx -1,4$ arba $\approx 1,4$;
c) funkcijos reikšmės didėja intervale $(-\infty; 0)$, mažėja intervale $(0; +\infty)$;
d) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 0, mažiausios reikšmės nustatyti negalima, funkcijos reikšmės neribotai mažėja, kai x artėja į $-\infty$ arba į $+\infty$.

159. Grafikai simetriški abscisių ašies atžvilgiu.

161. a) $a > 0$; b) $a < 0$.

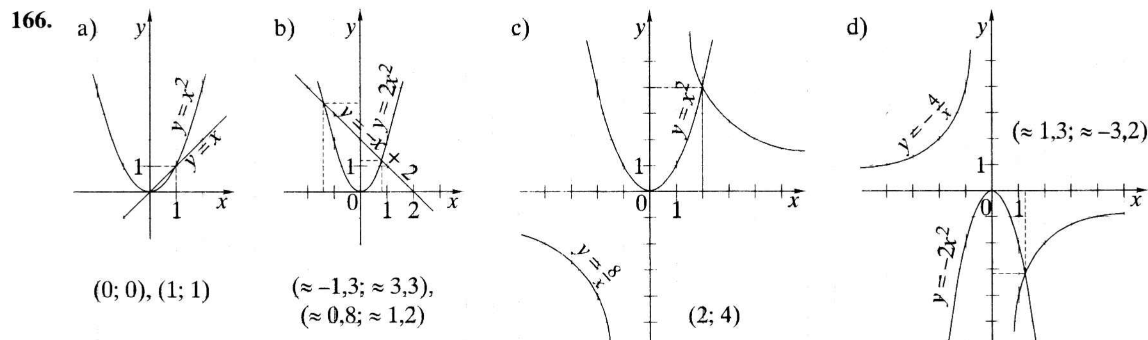
162. a), c), d) — taip; b) — ne.

163. a) Kadangi taškas, kurio koordinatės (1; 1), priklauso funkcijos $f(x) = ax^2$ grafikui, tai turi būti teisinga lygybė $1 = a \cdot 1^2$. Iš čia $a = 1$.
Nurodymas. Rinktis reikia „patogų", parabolei priklausantį tašką, kurio koordinatės būtų sveikieji skaičiai.
Atsakymas. a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$; c) $f(x) = 2x^2$; d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; e) $f(x) = -3x^2$; f) $f(x) = -x^2$.

164. a) $45 = a \cdot 3^2$, $a = 5$;
b) $16 = a \cdot (-2)^2$, $a = 4$;
c) $-6 = a \cdot (-1)^2$, $a = -6$;
d) $7 = a \cdot 1^2$, $a = 7$.

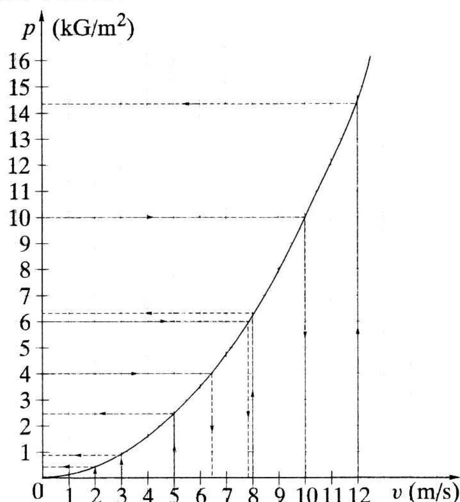
165. a) Mažiausia funkcijos reikšmė intervale $[-2; 2]$ lygi 0, didžiausia — 4;
b) mažiausia funkcijos reikšmė intervale $(-\infty; 2]$ lygi 0, didžiausios reikšmės nustatyti negalima;
c) funkcijos reikšmės intervale $(1; 2)$ didėja nuo 1 iki 4, bet mažiausios ir didžiausios reikšmių nustatyti negalima;
d) mažiausia funkcijos reikšmė intervaluose $(-\infty; -2]$ ir $[2; +\infty)$ lygi 4, didžiausios reikšmės nustatyti negalima.

166.



Nurodymas. Čia mokiniai grafikus turi braižyti kiek galima tikslesnius ir remdamiesi jais nustatyti grafikų bendrų taškų koordinates (apytiksles). Paprašykite mokinių algebriškai įsitikinti, kad a) ir c) punktuose surastos koordinatės tikrai yra tų grafikų bendrų taškų koordinatės.

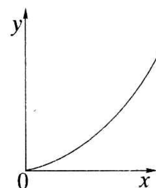
167. a) Patarkite mokiniams sudaryti funkcijos reikšmių lentelę, v reikšmes imant nuo 0 iki 13.



b) $0{,}4\,\frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$; $0{,}9\,\frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$; $2{,}5\,\frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$; $6{,}4\,\frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$; $14{,}4\,\frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$.
c) $\approx 6{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\approx 7{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

168. Kubo paviršius lygus visų sienų plotų sumai, t. y. $S = 6x^2$.

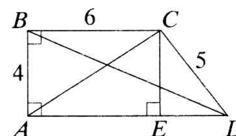
169. Abiem atvejais nuspalvintos dalies plotas S lygus kvadrato ir skritulio plotų skirtumui: $S = x^2 - \frac{\pi x^2}{4} = \frac{x^2(4-\pi)}{4}$. Nepriklausomas kintamasis yra x — kvadrato kraštinės ilgis ($x > 0$).
Plotas $S(x) = \frac{4-\pi}{4} \cdot x^2$, $x > 0$. Tai kvadratinė funkcija, jos grafikas — viena parabolės šaka.
Kadangi $\frac{4-\pi}{4} > 0$, tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn.



170. a) $B(-3; -5)$; b) $C(3; 5)$; c) $D(3; -5)$.
Nurodymas. Paklauskite mokinių, kokią figūrą gautume sujungę taškus B, C ir D atkarpomis. Pasiūlykite apskaičiuoti gautojo trikampio perimetrą ir plotą.

Pirmiausia patarkite pažymėti tašką $A(-3; 5)$.

171. a) $AD = AE + ED = 6 + 3 = 9$ (cm); $ED = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (cm);
b) $P = 4 + 6 + 5 + 9 = 24$ (cm);
c) $S = \frac{(6+9)\cdot 4}{2} = 30$ (cm²);
d) $BD = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}$ (cm); $AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (cm).

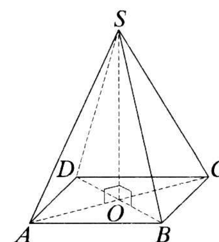


172. E.

173. a) $-8\frac{17}{21}$; b) $-39{,}8$.

174. a) $(c + 2)(c + 4) < (c + 3)^2$, nes $c^2 + 6c + 8 < c^2 + 6c + 9$;
b) $(a - 1)(a - 3) < (a - 2)^2$, nes $a^2 - 4a + 3 < a^2 - 4a + 4$;
arba:
a) $(c + 2)(c + 4) - (c + 3)^2 = c^2 + 6c + 8 - c^2 - 6c - 9 = -1 < 0$.
Vadinasi, $(c + 2)(c + 4) < (c + 3)^2$;
b) $(a - 1)(a - 3) - (a - 2)^2 = a^2 - 4a + 3 - a^2 + 4a - 4 = -1 < 0$.
Vadinasi, $(a - 1)(a - 3) < (a - 2)^2$.

175. Iš stačiojo trikampio ABC pagal Pitagoro teoremą turime:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \cdot 4^2$; $AC = 4\sqrt{2}$ cm.
$\triangle ASO$ — statusis: $AS^2 = AO^2 + SO^2$; $AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ (cm);
$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 36 - 8 = 28 = 4 \cdot 7$;
$SO = 2\sqrt{7}$ cm; $S_{ASC} = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{14}$ (cm²).
Atsakymas. $AC = 4\sqrt{2}$ cm; $SO = 2\sqrt{7}$ cm; $S_{ASC} = 4\sqrt{14}$ cm².



176. Pirmąkart sveriant galima atsverti 12 kilogramų vinių, antrąkart — 6 kilogramus, trečiąkart — 3 kilogramus.
Nurodymas. Šis uždavinys — tyrimo. Panašus į šį yra vadovėlyje „Matematika 8, II dalis“, 153 p.

2.3. Funkcija $f(x) = ax^2 + c$

Tai atskiras funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ atvejis, kai $b = 0$, $c \neq 0$. Šiame skyrelyje nagrinėjama, kaip pasikeičia funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiko padėtis koordinačių plokštumoje, kai funkcijai suteikiamas pokytis, t. y. $f(x) = ax^2 + c$. Iš pradžių palyginamos funkcijų $f(x) = ax^2 + c$ ir $f(x) = ax^2$ atitinkamos reikšmės ir pastebima, kad jos viena nuo kitos skiriasi pastoviu skaičiumi c. Daroma išvada, kad funkcijų $f(x) = ax^2 + c$ ir $f(x) = ax^2$ grafikų forma yra ta pati, tik jie skiriasi savo padėtimi koordinačių plokštumoje. Funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ grafiką galima gauti iš funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiko pastūmus jį atstumu $|c|$ aukštyn, kai $c > 0$, arba žemyn, kai $c < 0$. Tai pirmosios žinios apie grafikų transformaciją. Verta pasidaryti parabolių $y = ax^2$, kai $a = 1$, $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, šablonus ir jais naudotis braižant paraboles $y = ax^2+c$. Atsiranda galimybė vaizdžiai, „apčiuopiamai" pamatyti transformacijos rezultatą. Stumdant parabolę susidaręs vaizdinys padės geriau suvokti trigonometrinių ir kitų funkcijų grafikų transformacijas ateityje.

Pastabos. 1) Svarbiausia šiame skyrelyje išmokyti nubraižyti parabolę $y = ax^2 + c$.

2) Stipresnieji mokiniai nesunkiai turėtų suvokti, jog apskritai funkcijų $y = f(x)$ ir $y = f(x) + c$ atitinkamos reikšmės skiriasi skaičiumi c, o funkcijos $y = f(x) + c$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $y = f(x)$ grafiką atstumu $|c|$ lygiagrečiai y ašiai. Galima mokiniams pateikti tokio pobūdžio pratimų imant funkcijas $y = kx$ ir $y = kx + b$; $y = \frac{k}{x}$ ir $y = \frac{k}{x} + b$.

Pakartoti:

kuo skiriasi funkcijų $f(x) = kx$ ir $f(x) = kx + b$ atitinkamos reikšmės;

kaip galima gauti funkcijos $f(x) = kx + b$ grafiką remiantis funkcijos $f(x) = kx$ grafiku;

funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiką ir savybes.

Išmokti:

atpažinti funkciją $f(x) = ax^2 + c$ ir mokėti nubraižyti jos grafiką;

pagal koeficiento a ženklą nustatyti, kur nukreiptos parabolės $y = ax^2 + c$ šakos;

nurodyti parabolės $y = ax^2+c$ simetrijos ašį ir viršūnės koordinates;

kad funkcijų $f(x) = ax^2$ ir $f(x) = ax^2+c$ grafikai yra tos pačios formos ir skiriasi tik padėtimi koordinačių plokštumoje;

remiantis parabolės $y = ax^2+c$ grafiku nurodyti funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ reikšmių sritį, didėjimo ir mažėjimo intervalus, didžiausią (mažiausią) funkcijos reikšmę.

Šiame skyrelyje:

1. *Toje pačioje* koordinačių plokštumoje braižomi funkcijų $f(x) = ax^2 + c$, kai $a > 0$, grafikai imant pavyzdžiu funkcijas $f(x) = 2x^2+c$, kai $c = -3; 0; 3$. Tuo siekiama parodyti ryšį tarp šių funkcijų ir jų grafikų.

   Pastabos. 1) Reikia pabrėžti, kad parabolę $y = ax^2 + c$ ($c \neq 0$) galima gauti lygiagrečiai pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu $|c|$ y ašimi.

   2) Remdamiesi brėžiniu mokiniai nesunkiai išsiaiškins, kur yra parabolės $y = ax^2 + c$ simetrijos ašis, kur yra jos viršūnė. Neturėtų būti sunku atsakyti į klaustuku pažymėtus klausimus.

   3) Vadovėlyje yra korektūros klaida — vietoje „...$f(x) = 2x + 3$ ir $g(x) = 2x - 3$..." turi būti „...$f(x) = 2x^2 + 3$ ir $g(x) = 2x^2 - 3$...".

   4) Galima paprašyti mokinių nurodyti pateiktų funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.

2. Patiems mokiniams siūloma patyrinėti funkciją $f(x) = ax^2 + c$, kai $a < 0$, atliekant 1 užduotį.

   Pastaba. Galima paprašyti mokinių nurodyti parabolių $y = -2x^2 + 3$ ir $y = -2x^2 - 3$ simetrijos ašis, viršūnę, atitinkamų funkcijų reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, didžiausią (mažiausią) reikšmę, apibrėžimo ir reikšmių sritis.

3. Įrėmintame mėlyname stačiakampyje trumpai apibūdinamos parabolės $y = ax^2 + c$ ypatybės.

   Pastaba. Galima pasiūlyti mokiniams papildyti stačiakampį, nurodant funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, didžiausią (mažiausią) funkcijos reikšmę (priklausomai nuo a ženklo).

4. Pateikiama 2 užduotis, kurią atlikdami mokiniai praktiškai įsitikins šablonų privalumu.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 177–192 pratimai; kartojimui — 193–199 pratimai. 23–28, 83, 84, 88, 89

177. a), c), d) — taip; b) — ne.

178. Šią užduotį galima atlikti naudojantis šablonais. Silpnesnieji mokiniai čia gali grafikus braižyti sudarę funkcijų reikšmių lenteles.

179. a) I ir II; b) III ir IV; c) visuose.

180. a) $f(x) = 2x^2 + 3$; b) $f(x) = -2x^2 - 1{,}75$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$.

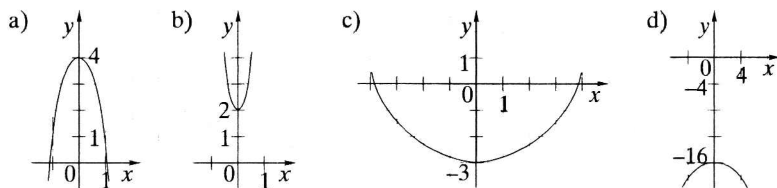
181. B.

182. Parabolės $y = ax^2 + c$ viršūnė yra taške $(0; c)$; ordinatė c atitinka didžiausią funkcijos reikšmę, kai $a < 0$; mažiausią, kai $a > 0$.
a) $E(f) = (-\infty; 5]$; b) $E(f) = [4; +\infty)$; c) $E(f) = [-7; +\infty)$;
d) $E(f) = (-\infty; 13]$.

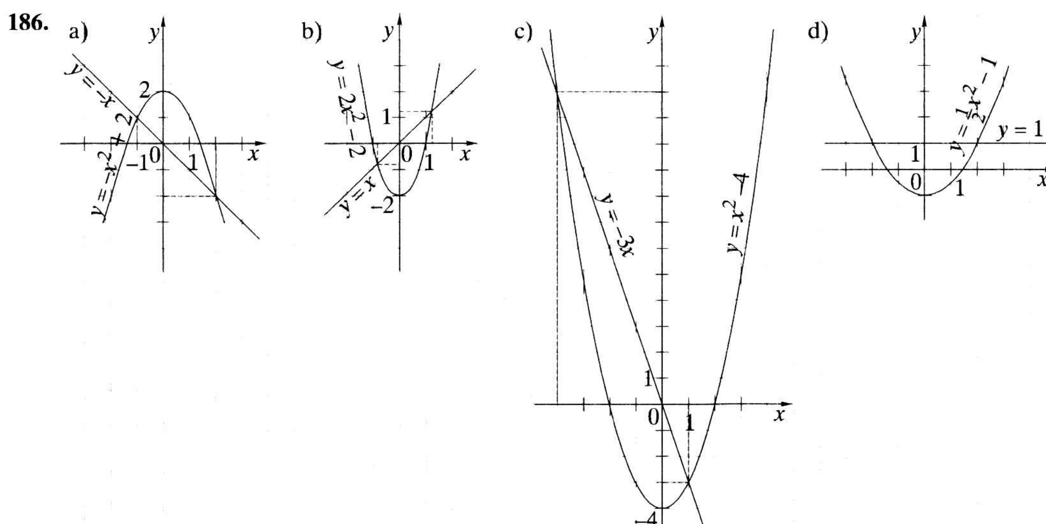
183. a) Parabolės simetrijos ašis — y ašis, viršūnės koordinatės — $(0; 4)$;
b) funkcijos $f(x) = 4 - 2x^2$ reikšmės didėja intervale $(-\infty; 0)$, mažėja — $(0; +\infty)$;
c) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 4, mažiausios reikšmės nustatyti negalima.

184. a) Parabolės simetrijos ašis — y ašis, viršūnės koordinatės — $(0; -2)$;
b) funkcijos $f(x) = -2 + \frac{1}{2}x^2$ reikšmės mažėja intervale $(-\infty; 0)$, didėja — $(0; +\infty)$;
c) mažiausia funkcijos reikšmė intervale $[1; 4]$ lygi $-1{,}5$, didžiausia — 6.

185. *Nurodymas.* Priminkite mokiniams, kad braižant scheminį funkcijos grafiką, pakanka pažymėti viršūnę, nubrėžti simetrijos ašį ir nustatyti šakų kryptį.



186.



Atsakymas. a) $(-1; 1)$, $(2; -2)$; b) $(\approx -0{,}8; \approx -0{,}8)$, $(\approx 1{,}3; \approx 1{,}3)$; c) $(-4; 12)$, $(1; -3)$; d) $(-2; 1)$, $(2; 1)$.

187. a) $f(x) = -x^2 + 6$; b) $f(x) = 2x^2 + 1$; c) $f(x) = -x^2 - 4$; d) $f(x) = 2x^2 - 4$.

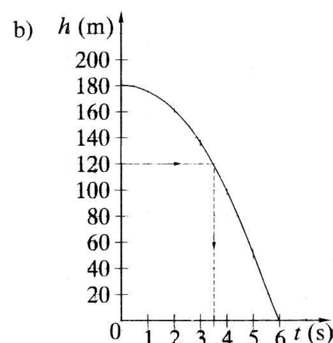
188. a), c) — taip; b), d) — ne.

189. b) $a = -\frac{3}{2}$; $c = 6$; c) $a = 1\frac{2}{7}$; $c = -7$; d) $a = -4$; $c = 9$.

190. $h \approx 180 - 5t^2$;

a)

t	0	1	2	3	4	5	6
h	180	175	160	135	100	55	0



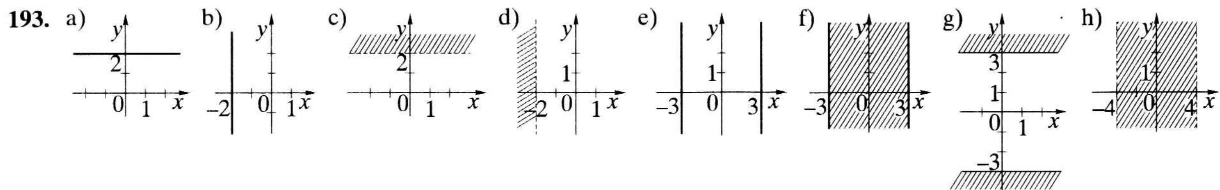
c) po 6 sekundžių;
d) maždaug po 3,5 sekundžių.

191. a) Matome, kad parabolės šakos nukreiptos žemyn. Kadangi arkos aukštis yra 12 m, tai parabolės viršūnė yra taške $(0; 12)$. Todėl turime funkciją $f(x) = ax^2 + 12$ $(a < 0)$. Kadangi tilto ilgis 96 metrai, o parabolė yra simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, tai taškų, kuriuose ji kerta x ašį, koordinatės yra $(-48; 0)$ ir $(48; 0)$. Šių taškų koordinatės turi tenkinti parabolės lygtį: $y = ax^2 + 12$. Vadinasi, $a \cdot 48^2 + 12 = 0$, $a = -\frac{1}{192}$. Taigi $f(x) = -\frac{1}{192}x^2 + 12$.
b) Pastebėkime, kad atramų 1 ir 7; 2 ir 6; 3 ir 5 ilgiai yra vienodi. Atstumai tarp atramų yra $96 : 8 = 12$ (m). Atramų aukščius sužinosime apskaičiavę funkcijos reikšmes, kai $x = 12; 24; 36$.

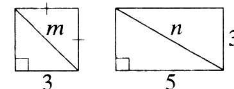
1-os ir 7-os atramų ilgis lygus $f(36) = -\frac{1}{192} \cdot 36^2 + 12 = 5{,}25$ (m);
2-os ir 6-os atramų ilgis lygus $f(24) = -\frac{1}{192} \cdot 24^2 + 12 = 9$ (m);
3-os ir 5-os atramų ilgis lygus $f(12) = -\frac{1}{192} \cdot 12^2 + 12 = 11{,}25$ (m).

192. a) $f(x) = ax^2 - 25$ $(a > 0)$. Kadangi tilto ilgis 40 metrų, tai parabolės susikirtimo su x ašimi taškų koordinatės yra $(-20; 0)$ ir $(20; 0)$. Šių taškų koordinatės turi tenkinti parabolės lygtį: $y = ax^2 - 25$, $a \cdot 20^2 - 25 = 0$, $a = \frac{1}{16}$; $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - 25$.
b) $MP = 25 - |f(5)| = 25 + \frac{1}{16} \cdot 5^2 - 25 \approx 1{,}6$ (m);
$SR = 25 - |f(10)| = 25 + \frac{1}{16} \cdot 10^2 - 25 = \frac{25}{4} \approx 6{,}3$ (m);
$VT = 25 - |f(15)| = 25 + \frac{1}{16} \cdot 15^2 - 25 = \frac{225}{16} \approx 14{,}1$ (m).

193.



194. a) Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x. Tada stačiakampio kraštinės yra x ir $x + 2$. Kvadrato plotas yra x^2, o stačiakampio — $x(x + 2)$. Remdamiesi sąlyga sudarome lygtį: $x^2 + 6 = x(x + 2)$; $x = 3$. Taigi kvadrato kraštinė lygi 3 cm;
b) 12 cm;
c) 15 cm^2;
*d) $m = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$; $n = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$;
$\frac{m}{n} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$.



195. a) Nuspalvinta figūra apribota lankais dviejų apskritimų, kurių spinduliai lygūs 4 cm. Kiekvienas lankas lygus ketvirčiui apskritimo ilgio. Vadinasi, perimetras lygus pusei apskritimo ilgio, t. y. $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = 4\pi$ (cm);
b) $S = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 - 4^2 = 8\pi - 16 = 8(\pi - 2)$ (cm^2).

196. D.

197. a) $17a^{-3}b$; b) $\left(\frac{2x^4}{5y^5}\right)^2 \cdot \frac{4y^6}{x^5} = \frac{16x^8y^6}{25y^{10}x^5} = \frac{16x^3}{25y^4}$.

198. a) $x(x - 2)(x + 2)$; b) $4(a - b)^2$; c) $(m - n)(c + 5)$;
d) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = (x^2 - 3x) - (2x - 6) = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$.

199. *I būdas.* Jeigu trys ančiukai ir keturi žąsiukai sveria 2,5 kg, o keturi ančiukai ir trys žąsiukai sveria 2,4 kg, tai:
septyni ančiukai ir septyni žąsiukai sveria 4,9 kg;
vienas ančiukas ir vienas žąsiukas sveria 0,7 kg;
trys ančiukai ir trys žąsiukai sveria 2,1 kg;
vienas žąsiukas sveria $2{,}5 - 2{,}1 = 0{,}4$ (kg);
vienas ančiukas sveria $2{,}4 - 2{,}1 = 0{,}3$ (kg).
II būdas. Sakykime, kad vienas ančiukas sveria x kg, tai vienas žąsiukas sveria $\frac{2{,}5-3x}{4}$ kg (rėmėmis tuo, kad trys ančiukai ir keturi žąsiukai sveria 2,5 kg). Pagal sąlygą sudarome lygtį:
$4x + \frac{2{,}5-3x}{4} \cdot 3 = 2{,}4$; $x = 0{,}3$.
Žąsiukas sveria $\frac{2{,}5-3 \cdot 0{,}3}{4} = 0{,}4$ (kg).
III būdas. Sakykime, kad vienas žąsiukas sveria x kg, tai vienas ančiukas sveria $\frac{2{,}5-4x}{3}$ kg. Pagal sąlygą sudarome lygtį:
$\frac{2{,}5-4x}{3} \cdot 4 + 3x = 2{,}4$; $x = 0{,}4$.
Ančiukas sveria $\frac{2{,}5-4 \cdot 0{,}4}{3} = \frac{2{,}5-1{,}6}{3} = 0{,}3$ (kg).
Pastaba. Išnagrinėjus 3 skyrių „Tiesinių lygčių sistemos“, šį uždavinį mokiniai mokės spręsti ir sudarydami lygčių sistemą.
Atsakymas. Ančiukas sveria 0,3 kg, žąsiukas — 0,4 kg.

2.4. Funkcijos $f(x)=a(x+m)^2$ ir $g(x)=a(x+m)^2+n$

Šiame skyrelyje pirmiausia nagrinėjama, kaip pasikeičia parabolės $y = ax^2$ padėtis koordinačių plokštumoje, kai argumentui suteikiamas pokytis, t. y. $y = a(x + m)^2$.

Iš pradžių palyginamos funkcijų $f(x) = ax^2$ ir $g(x) = a(x + m)^2$ atitinkamos reikšmės ir pastebima, kad funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės yra *lygios* taškuose, kurių abscisės skiriasi skaičiumi m. Daroma išvada, kad funkcijų $f(x) = ax^2$ ir $g(x) = a(x + m)^2$ grafikų forma ta pati, bet jie skiriasi savo padėtimi koordinačių plokštumoje. Funkcijos $g(x) = a(x + m)^2$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiką atstumu $|m|$ išilgai x ašies.

Nurodymas. Stipresniems mokiniams galima pasakyti, kad apskritai funkcijų $y = f(x)$ ir $y = f(x + m)$ reikšmės yra lygios taškuose, kurių abscisės yra x ir $x - m$, o funkcijos $y = f(x + m)$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $y = f(x)$ grafiką atstumu $|m|$ išilgai x ašies. (Ši transformacija labai pravers nagrinėjant trigonometrines funkcijas vidurinėje mokykloje.)

Apibendrinant 2.3 ir šio skyrelio medžiagą daroma išvada, kad funkcijos $f(x) = a(x + m)^2 + n$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiką atstumu $|m|$ lygiagrečiai x ašiai ir atstumu $|n|$ lygiagrečiai y ašiai.

Pastabos. 1) Nesunku įsitikinti, kad kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$ galima užrašyti pavidalu $f(x) = a(x + m)^2 + n$ (žr. 5 skyrelį). Taigi galima sakyti, kad šiame skyrelyje *įrodyta*, jog funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, grafikas yra parabolė, kurios forma yra tokia, kaip parabolės $y = ax^2$.

2) Šio skyrelio nagrinėti su visais mokiniais nebūtina.

Pakartoti, kaip remiantis funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiku galima gauti funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ grafiką.

Išmokti, kaip remiantis funkcijos $f(x) = ax^2$ grafiku gauti funkcijos $f(x) = a(x + m)^2$ grafiką.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjamos funkcijų $f(x) = a(x+m)^2$ ir $f(x) = ax^2$ reikšmių lentelės ir vienoje koordinačių plokštumoje braižomi jų grafikai, imant pavyzdžiu funkcijas, kai $a = \frac{1}{2}$, $m = -3$; 3.

   Tuo siekiama parodyti, su kuriomis argumentų reikšmėmis tų funkcijų reikšmės tarpusavyje yra lygios ir kaip nuo m reikšmės priklauso tų funkcijų grafikų tarpusavio padėtis.

   Pastabos. 1) Analogišką tyrimą siūloma atlikti mokiniams su funkcijomis, kai $a < 0$, t. y. $a = -\frac{1}{2}$.

   2) Galima aptarti pagrindines funkcijos $f(x) = a(x+m)^2$ savybes priklausomai nuo a ženklo nurodant funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo ir mažėjimo intervalus, didžiausią (mažiausią) funkcijos reikšmę.

   3) Kaip ir ankstesniuose skyreliuose, parabolės $y = a(x+m)^2$ ypatybės glaustai pateiktos įrėmintame stačiakampyje.

2. Apibendrinant praeitame ir šiame skyreliuose įgytas žinias braižomas funkcijos $f(x) = a(x + m)^2 + n$ grafikas imant pavyzdžiu funkciją, kai $a = \frac{1}{2}$, $m = -3$, $n = 2$. Parodoma, kad norimą parabolę galima nubraižyti pastūmus parabolę $y = ax^2$ per $|m|$ vienetų lygiagrečiai x ašiai ir per $|n|$ vienetų lygiagrečiai y ašiai.

   Nurodymai. 1) Kaip mokiniai įsisavino nagrinėtą medžiagą pamatysime atlikdami 2 užduotį.

   2) Vėl įrėmintame stačiakampyje glaustai pateikiama parabolės $y = a(x + m)^2 + n$ ypatybės ir braižymo eiga.

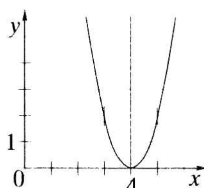
3. Pilkame fone parodoma, kad analogiškai galima braižyti grafiką funkcijos $y = f(x + m) + n$, remiantis funkcijos $y = f(x)$ grafiku. Čia pavyzdžiu imama hiperbolė.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

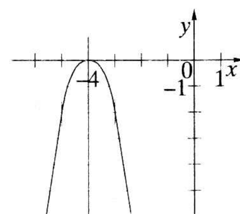
200–216 — teminiai pratimai; 217–222 — kartojimo pratimai. 29–38, 80, 82, 85–87

200. Silpnesni mokiniai gali sudaryti nurodytų funkcijų reikšmių lenteles ir remdamiesi jomis braižyti duotų funkcijų grafikus. Čia galima naudotis ir parabolės $y = x^2$ šablonu. Pasiūlykite mokiniams nusakyti žodžiais, kuo skiriasi parabolių $y = (x - 2)^2$ ir $y = (x + 2)^2$ padėtis koordinačių plokštumoje lyginant jas su parabole $y = x^2$.

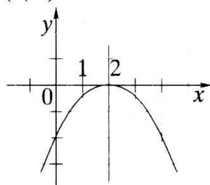
201. a) Tiesė $x = 4$ — simetrijos ašis; $(4; 0)$ — viršūnės koordinatės; funkcijos reikšmės mažėja intervale $(-\infty; 4)$; funkcijos reikšmės didėja intervale $(4; +\infty)$; funkcijos reikšmių sritis $[0; +\infty)$.



b) Tiesė $x = -4$ — simetrijos ašis; $(-4; 0)$ — viršūnės koordinatės; funkcijos reikšmės didėja intervale $(-\infty; -4)$; funkcijos reikšmės mažėja intervale $(-4; +\infty)$; funkcijos reikšmių sritis $(-\infty; 0]$.

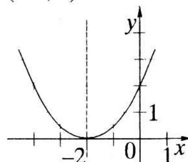


c) Tiesė $x = 2$ — simetrijos ašis;
(2; 0) — viršūnės koordinatės;



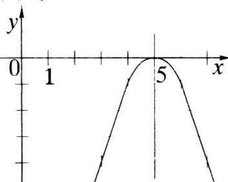
reikšmės didėja intervale $(-\infty; 2)$;
reikšmės mažėja intervale $(2; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis $(-\infty; 0]$.

d) Tiesė $x = -2$ — simetrijos ašis;
(−2; 0) — viršūnės koordinatės;



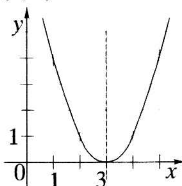
reikšmės mažėja intervale $(-\infty; -2)$;
reikšmės didėja intervale $(-2; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis $[0; +\infty)$.

e) Tiesė $x = 5$ — simetrijos ašis;
(5; 0) — viršūnės koordinatės;



reikšmės didėja intervale $(-\infty; 5)$;
reikšmės mažėja intervale $(5; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis $(-\infty; 0]$.

f) Tiesė $x = 3$ — simetrijos ašis;
(3; 0) — viršūnės koordinatės;

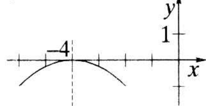


reikšmės mažėja intervale $(-\infty; 3)$;
reikšmės didėja intervale $(3; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis $[0; +\infty)$.

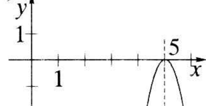
202. a) $(-\infty; 0]$; b) $[0; +\infty)$; c) $[-\infty; 0]$; d) $[0; +\infty]$.

203. **D**.

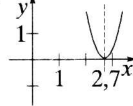
204. a)



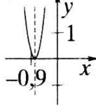
b)



c)

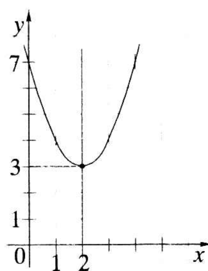


d)

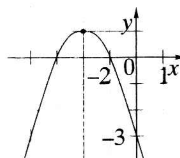


205. a) $f(x) = 2(x-1)^2$; b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2$; c) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2$; d) $f(x) = 3(x+2)^2$.

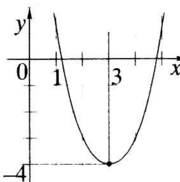
206. a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = 2$;
viršūnės koordinatės: (2; 3);
reikšmių mažėjimo intervalas: $(-\infty; 2)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(2; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis: $[3; +\infty)$.



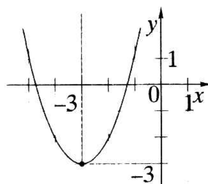
b) $f(x) = -(x+2)^2 + 1$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = -2$;
viršūnės koordinatės: (−2; 1);
reikšmių mažėjimo intervalas: $(-2; +\infty)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(-\infty; -2)$;
funkcijos reikšmių sritis: $(-\infty; 1]$.



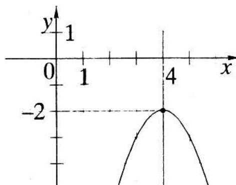
c) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = 3$;
viršūnės koordinatės: (3; −4);
reikšmių mažėjimo intervalas: $(-\infty; 3)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(3; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis: $[-4; +\infty)$.



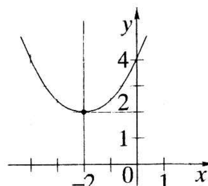
d) $f(x) = (x+3)^2 - 3$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = -3$;
viršūnės koordinatės: $(-3; -3)$;
reikšmių mažėjimo intervalas: $(-\infty; -3)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(-3; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis: $[-3; +\infty)$.



e) $f(x) = -(x-4)^2 - 2$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = 4$;
viršūnės koordinatės: $(4; -2)$;
reikšmių mažėjimo intervalas: $(4; +\infty)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(-\infty; 4)$;
funkcijos reikšmių sritis: $(-\infty; -2]$.



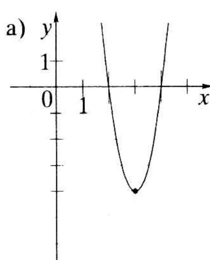
f) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$.
Simetrijos ašis: tiesė $x = -2$;
viršūnės koordinatės: $(-2; 2)$;
reikšmių mažėjimo intervalas: $(-\infty; -2)$;
reikšmių didėjimo intervalas: $(-2; +\infty)$;
funkcijos reikšmių sritis: $[2; +\infty)$.

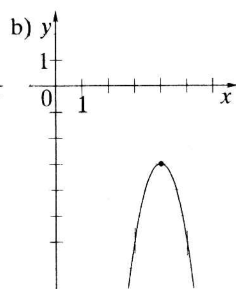


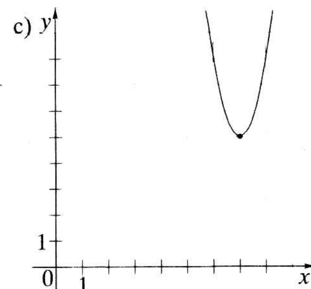
207. a) $[1; +\infty)$; b) $(-\infty; 11]$; c) $[-5; +\infty)$; d) $(-\infty; 7]$; e) $(-\infty; -25]$; f) $[-14; +\infty)$.

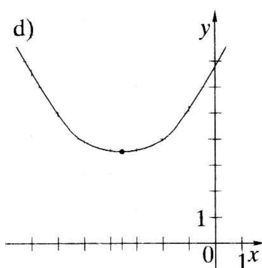
208. C.

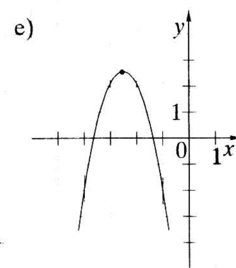
209.

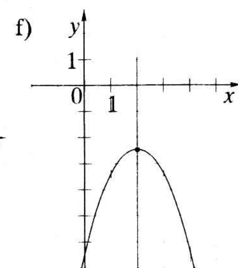
a) 

b) 

c) 

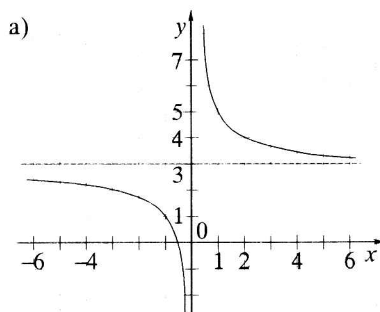
d) 

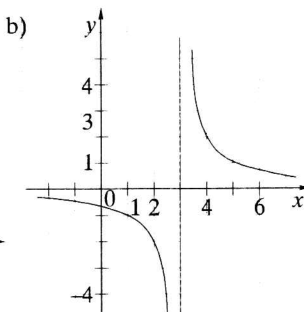
e) 

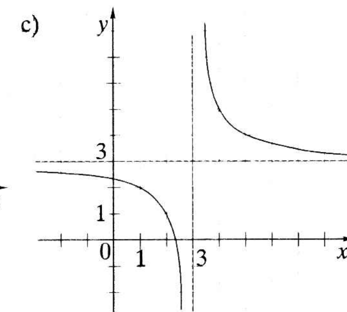
f) 

210. a) $f(x) = \frac{3}{4}(x-3)^2 + 1$; b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$;
c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 4$; d) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$.

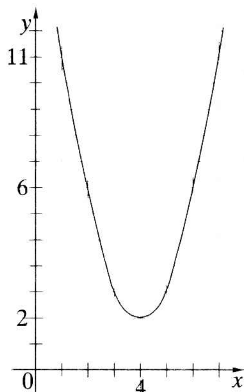
211.

a) 

b) 

c) 

212. a)



b) **D**.

213. Kubo paviršiaus plotas S išreiškiamas kvadratine funkcija $S(x) = 6x^2$.

a) $S(x+2) = 6(x+2)^2 = 6x^2 + 24x + 24$. Kubo paviršiaus plotas padidėtų $24x + 24$ kvadratinių vienetų;

b) $S(x-3) = 6(x-3)^2 = 6x^2 - 36x + 54$. Plotas sumažėtų $36x - 54$ kvadratinių vienetų.

214. Yra vienintelis statusis lygiašonis trikampis, kurio įžambinė 2 cm ilgesnė už jo statinius. Todėl nekorektiška prašyti užrašyti to trikampio ploto *priklausomybę* nuo įžambinės ilgio. Reikėtų sąlygą pakeisti taip: „Formule užrašykite stačiojo lygiašonio trikampio ploto priklausomybę nuo įžambinės ilgio. Kokia tai funkcija?"

Atsakymas. $S(c) = \frac{1}{4}c^2$. Tai kvadratinė funkcija.

215. a) $V(x) = 20x^2$; b) $V(x) = 20(x+5)^2$; c) $V(x) = 20(x-6)^2$.

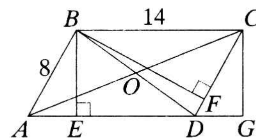
216. Gautoji funkcija yra kvadratinė: a) $y = \pi(8-x)^2$; b) $y = \pi(5+x)^2$.
Pastaba. Galima paprašyti mokinių nurodyti gautų funkcijų apibrėžimo sritis.

217. a) a) 60°, 120°, 120°;

b) AE – statinis prieš 30° kampą, todėl $AE = \frac{1}{2}AB = 4$ (cm). Remiantis Pitagoro teorema $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (cm). Kita lygiagretainio aukštinė lygi:
$BF = \frac{S}{DC} = \frac{AD \cdot BE}{DC} = \frac{14 \cdot 4\sqrt{3}}{8} = 7\sqrt{3}$ (cm);

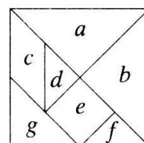
c) $56\sqrt{3}$ cm^2;

d) $BD^2 = BE^2 + ED^2$; $BD = 2\sqrt{37}$ cm; $AC^2 = AG^2 + CG^2$; $AE = DG$; $AC^2 = 18^2 + (4\sqrt{3})^2 = 372$; $AC = 2\sqrt{93}$ cm.



218. Indo tūris — 4,8 dm^3; paviršiaus plotas — 1384 cm^2. Kadangi 1 ℓ = 1 dm^3, tai inde 5 litrai vandens netilptų.

219. $a = b = \frac{1}{4}$; $g = \frac{1}{8}$; $d = f = \frac{1}{2}g = \frac{1}{16}$;
$c = e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - g - d - f\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}$.



220. Jeigu valties savasis greitis a, o upės tėkmės greitis b ($a > b$), tai $v_1 = a + b$, o $v_2 = a - b$. Todėl $\frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{a + b - (a - b)}{2} = b$.

Atsakymas. **E**.

221. Tarkime, kad iš pradžių prekė kainavo N litų. Tada po pirmojo atpiginimo prekė kainavo $0{,}9N$ litų, po antrojo — $0{,}9N \cdot 0{,}8 = 0{,}72N$ litų, po trečiojo — $0{,}72N \cdot 0{,}75 = 0{,}54N$ litų.

Atsakymas. Po visų atpiginimų prekė atpigo 46%.

222. Tarkime, kad jaunėliui yra x metų. Tada vyriausiajam vaikui yra $(x + 1{,}5 \cdot 14)$ metų. Kadangi vyriausiasis vaikas 8 kartus vyresnis už jauniausiąjį, tai turi būti teisinga lygybė $x + 21 = 8x$ ir $x = 3$.

Atsakymas. 3 metai.

Šio skyrelio pagrindinis tikslas yra išmokyti nubraižyti parabolę $y = ax^2 + bx$. Remiantis ja 6 skyrelyje bus braižoma parabolė $y = ax^2 + bx + c$.

Parabolės $y = ax^2 + bx$ braižymo eiga gali būti tokia:

1) randame taškus, kuriuose parabolė kerta x ašį. Tuo tikslu sprendžiame lygtį $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;
2) randame parabolės simetrijos ašį. Akivaizdu, kad ji kirs x ašį taške x_3, kurio koordinatė yra taškų x_1 ir x_2 koordinačių aritmetinis vidurkis (atkarpos, kurios galai x_1 ir x_2, vidurio taške), t. y. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$;
3) randame parabolės viršūnės koordinates. Kadangi simetrijos ašis eina per parabolės viršūnę, tai parabolės viršūnės abscisė lygi $-\frac{b}{2a}$. Įstatę į parabolės lygtį šią x reikšmę, randame viršūnės ordinatę: $y = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)$, $y = -\frac{b^2}{4a}$;
4) per tris taškus jau galima braižyti parabolę. Žinoma, galima rasti ir daugiau parabolei priklausančių taškų ir tik po to braižyti norimą grafiką.

Pastabos. 1) Mokiniams neturėtų būti sunku remiantis šiuo algoritmu nubraižyti reikiamą parabolę. Atkreipkite mokinių dėmesį į parabolės viršūnės koordinačių radimą. Jei mokiniai šiame skyrelyje išmoks, kaip ieškoti parabolės $y = ax^2 + bx$ viršūnės koordinatės, tai nesunkiai išmoks rasti ir parabolės $y = ax^2 + bx + c$ ($c \neq 0$) viršūnės koordinates.

2) Vadovėlyje parabolė $y = ax^2 + bx$ braižoma remiantis reikšmių lentele. Suprantama, kad tai nėra pats geriausias būdas, tad jį naudoti turėtų tik silpnesni mokiniai.

Pakartoti:

nepilnosios kvadratinės lygties $ax^2 + bx = 0$ sprendimą;

kaip priklausomai nuo koeficiento a ženklo nukreiptos parabolės šakos;

kad parabolė turi simetrijos ašį ir jos viršūnė priklauso tai ašiai.

Išmokti:

nubraižyti parabolę $y = ax^2 + bx$;

apskaičiuoti taškų, kuriuose parabolė kerta x ašį, ir parabolės viršūnės koordinates;

kad funkcijos $f(x) = ax^2 + bx$ grafikas yra $y = ax^2$ formos parabolė;

nurodyti funkcijos $f(x) = ax^2 + bx$ savybes remiantis jos grafiku;

suprasti funkcijos nulių sąvoką.

Šiame skyrelyje:

1. Remiantis reikšmių lentele braižomas funkcijos $f(x) = ax^2 + bx$ ($b \neq 0$) grafikas imant pavyzdžiu funkciją $f(x) = x^2 + 2x$.

   Pastaba. Mokiniams galima liepti nubraižyti daugiau tokių funkcijų pavyzdžių ir padaryti išvadą, kad visais atvejais parabolė x ašį kerta koordinačių pradžios taške ir taške $x = -\frac{b}{a}$. Reikia pastebėti, kad remiantis šiais taškais labai patogu rasti simetrijos ašį, t. y. $x = -\frac{b}{2a}$, o remiantis ja ir parabolės viršūnės taško koordinates $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$. Aišku, mokiniams nereikia liepti įsiminti viršūnės koordinačių, o reikia siekti, kad mokiniai suvoktų, kaip jos randamos.
2. Parodoma, kad funkcijai $f(x) = ax^2 + bx$ galima suteikti pavidalą $f(x) = a(x+m)^2+n$, o tuo pačiu įrodoma, kad parabolę $y = ax^2 + bx$ galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu $|m|$ lygiagrečiai x ašiai ir atstumu $|n|$ lygiagrečiai y ašiai.
3. Žodžiais nusakoma, kad parabolę $y = ax^2 + bx$ patogu braižyti randant taškų, kuriuose parabolė kerta x ašį, ir viršūnės koordinates.

   Pastabos. 1) Tiriant funkcijas, braižant jų grafikus dažnai prireikia rasti taškus, su kuriais funkcijos reikšmė lygi nuliui. Tos argumento reikšmės kartais vadinamos funkcijos nuliais. Mokykliniuose vadovėliuose ši sąvoka beveik nebevartojama.

   2) Užduotyje nurodytos funkcijos grafiką mokiniai turėtų braižyti nesiremdami reikšmių lentele.
4. Įrėmintame stačiakampyje trumpai nusakomos parabolės $y = ax^2 + bx$ pagrindinės ypatybės ir kaip ją galima gauti remiantis parabole $y = ax^2$.
5. Lentele pateikiamas algoritmas, remiantis kuriuo patogu braižyti parabolę $y = ax^2 + bx$.

   Nurodymas. Norėdami labiau akcentuoti simetrijos ašį, galite pateikti tokią parabolės braižymo schemą.

   Nubraižykime, pvz., parabolę $y = -x^2 + 4x$.

   1) Nustatome parabolės viršūnės koordinates: $x = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2$, $y = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$.

   2) Nustatome parabolės simetrijos ašį: $x = 2$.

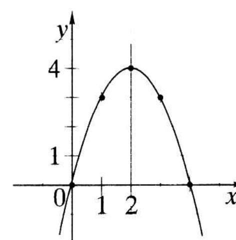
   3) Sudarome funkcijos reikšmių lentelę, pasirinkdami dvi-tris reikšmes į kurią nors pusę nuo simetrijos ašies. Šiuo atveju patogiau rinktis į kairę, nes x reikšmės mažesnės:

x	2	1	0
y	4	3	0

   4) Koordinačių plokštumoje nubrėžiame simetrijos ašį ir pažymime taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje.

   5) Pažymime taškus, simetriškus jau pažymėtiems taškams tiesės $x = 2$ atžvilgiu.

   6) Sujungiame visus pažymėtus taškus.

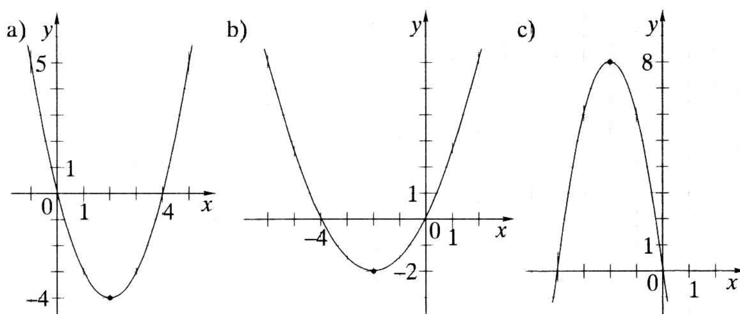


223–238 — teminiai pratimai; 239–245 — kartojimo pratimai. 39–44

223. Parabolės šakos nukreiptos: a), b), d), e) — aukštyn; c), f) — žemyn.
Simetrijos ašis — tiesė: a) $x = -2$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 2$; e) $x = \frac{1}{8}$; f) $x = 3$.

224. Parabolės viršūnės koordinatės:
a) $(1; -4)$; b) $(-2; -1)$; c) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)$; d) $(1{,}5; 1{,}125)$; e) $(2; 1)$; f) $(1; 3)$.
Parabolė koordinačių ašis kerta taškuose:
a) $(0; 0)$, $(2; 0)$; b) $(0; 0)$, $(-4; 0)$; c) $(0; 0)$, $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; d) $(0; 0)$, $(3; 0)$;
e) $(0; 0)$, $(4; 0)$; f) $(0; 0)$, $(2; 0)$.

225.

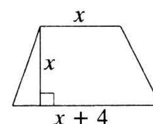


226. a) 9; b) reikšmės didėja intervale $(-\infty; 3)$; reikšmės mažėja intervale $(3; +\infty)$;
c) teigiamas reikšmes funkcija įgyja intervale $(0; 6)$, o neigiamas — intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(6; +\infty)$.

227. a) -2; b) reikšmės didėja intervale $(2; +\infty)$; reikšmės mažėja intervale $(-\infty; 2)$;
c) teigiamas reikšmes funkcija įgyja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(4; +\infty)$, o neigiamas — $(0; 4)$.

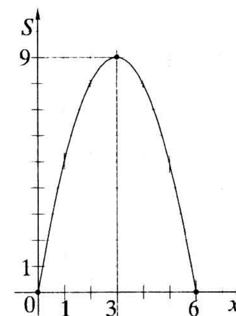
228. Trapecijos plotą pažymėkime S: $S = \frac{(2x+4)x}{2} = (x+2)x = x^2+2x$. Trapecijos plotas S — kvadratinė funkcija nuo x.

Atsakymas. $S(x) = x^2 + 2x$.



229. a) Jei viena stačiakampio kraštinė lygi x cm, tai kita — $\frac{12-2x}{2} = 6 - x$ (cm). Tuomet stačiakampio plotas $S = x \cdot (6 - x) = -x^2 + 6x$.
Nurodymas. Aptarkite su mokiniais gautos funkcijos apibrėžimo sritį ($D = (0; 6)$) ir pastebėkite, kad funkcijos reikšmės gali būti tik teigiami skaičiai ($E > 0$).

b) Abscisių ašyje atidėkime vienos stačiakampio kraštinės ilgį x, ordinačių ašyje to stačiakampio plotą S.
Nurodymas. Mokiniai gali klysti braižydami funkcijos $S(x) = -x^2 + 6x$ grafiką neatsižvelgdami į apibrėžimo sritį. Panagrinėkite gautą grafiką. Paprašykite mokinių iš grafiko nustatyti, koks bus stačiakampio plotas, kai viena kraštinė lygi, pavyzdžiui, 1 cm; kam apytiksliai lygios stačiakampio kraštinės, kai jo plotas yra 8 cm^2, ir panašiai.

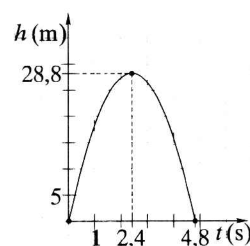


c) 9. *Nurodymas.* Čia su stipresniais mokiniais galima padaryti išvadą, kad $-x^2 + 6x \leqslant 9$.

d) Iš grafiko matome, kad didžiausią reikšmę funkcija įgyja, kai $x = 3$. (Tai galima nustatyti ir algebriškai, nes parabolės viršūnė yra jos simetrijos ašyje. Vadinasi, viršūnės abscisė $x_0 = \frac{6+0}{2} = 3$.) Tada kita stačiakampio kraštinė yra $6 - x = 6 - 3 = 3$. Vadinasi, stačiakampis yra kvadratas.

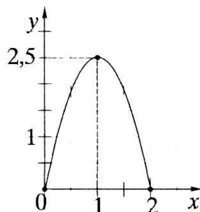
Nurodymas. Galima pateikti daugiau tokių uždavinių, imant kitas stačiakampio perimetro reikšmes, ir padaryti išvadą, kad iš stačiakampių, turinčių vienodą perimetrą, didžiausią plotą turi kvadratas.

230. $h(t) = 24t - 5t^2$; $24t - 5t^2 = 0$, $t = 0$ ir $t = 4{,}8$.
a) Kamuoliukas kilo aukštyn 2,4 sekundės, leidosi žemyn taip pat 2,4 sekundės;
b) po 4,8 s;
c) parabolės viršūnės taško ordinatė atitinka didžiausią aukštį, į kurį pakilo kamuoliukas.



231. a) $60 - 2x$; b) $S(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$; c) $(15; 450)$; d) $x = 15$;
e) 30 m ir 15 m.

232. a)



b) 2,5 m — didžiausias aukštis; 2 m — didžiausias nuotolis, kurį gali pasiekti vanduo.

233. Remdamiesi brėžiniu užrašykite lygybę: $4y + 3x = 120$, $y = 30 - \frac{3}{4}x$;

a) $S = 2y \cdot x$; $S(x) = (60 - 1{,}5x)x = -1{,}5x^2 + 60x$.

b) $S(x)$ — kvadratinė funkcija, jos grafikas — parabolė. Parabolės viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. $(20; 600)$ — parabolės viršūnės koordinatės; kai $x = 20$, tai $y = 30 - \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$.
Vieno aptvaro matmenys yra 15 m × 20 m.

234. Didžiausias vandens pakilimo aukštis yra 11,25 m, didžiausias nuotolis, kurį pasiekia vanduo — 15 m.

235. Didžiausias aukštis nuo žemės, į kurį gali pakilti motociklininkas, yra 15 pėdų (4,575 metrų).

236. a) 100 pėdų (30,5 m); b) 35 pėdos (10,675 m).

237. Tarkime, kad sandėlio ilgis yra x m. Tuomet sandėlio plotis yra $(16 - x)$ m, o tūris $V(x) = 4x(16 - x)\,\text{m}^3$. $V(x)$ — kvadratinė funkcija, jos grafikas — parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn. Parabolės viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. $4x(16 - x) = 0$, kai $x = 0$ ir $x = 16$. $(8; 256)$ — parabolės viršūnės koordinatės. Taigi tūris bus didžiausias, kai sandėlio ilgis ir plotis yra lygūs 8 m.

Atsakymas. 8 m, 8 m.

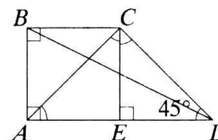
238. a) Nenuspalvinto mažojo skritulio skersmuo lygus $20 - x$. Nenuspalvintų skritulių plotų suma lygi: $\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(20-x)^2}{4} = \frac{\pi x^2}{2} + 100\pi - 10\pi x$. Nuspalvintos dalies plotas lygus: $100\pi - \left(\frac{\pi}{2}x^2 + 100\pi - 10\pi x\right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$.

b) Randame taškų, kuriuose parabolė $y = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$ kerta x ašį, koordinates: $-\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x = 0$, $x = 0$ ir $x = 20$; $x_0 = \frac{0+20}{2} = 10$, $y_0 = -\frac{\pi}{2} \cdot 10^2 + 10\pi \cdot 10 = 50\pi$, $(10; 50\pi)$ — parabolės viršūnės koordinatės.

c) $x = 10$; d) $x = 10$.

239. a) -2; b) 3.

240. $AE = BC = 2\,\text{cm}$, $ED = 2\,\text{cm}$;
$\triangle CED$ — statusis lygiašonis; $CE = ED = 2\,\text{cm}$.



a) $AB = EC = 2\,\text{cm}$; b) $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$;
c) $P_{ABCD} = 2(4 + \sqrt{2})\,\text{cm}$; d) $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot AB = 6\,\text{cm}^2$;
e) $\triangle ACD$ — status lygiašonis, nes $AE = ED$.
Vadinasi, $AC = CD = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$. $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$.

241. Trijų kubų tūrių suma: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 216\,(\text{cm}^3)$. Naujo kubo tūris taip pat $216\,\text{cm}^3$. Naujo kubo briauna $\sqrt[3]{216} = 6\,(\text{cm})$.

242. $5 + \frac{5+5+5}{5} = 8$.

243. Tarkime, kad klasėje yra x mokinių. Pirmuoju atveju būtų išdalyta $2x$, o antruoju — $3x$ lapų. Sudarome lygtį: $2x + 16 = 3x - 12$; $x = 28$.

Atsakymas. Klasėje yra 28 mokiniai, jiems buvo paruošti 72 popieriaus lapai.

244. E.

245. Jeigu visi penki mokiniai būtų užėmę III vietą, tai iš viso jie būtų surinkę $5 \cdot 13 = 65$ taškus. Tie mokiniai surinko $69 - 65 = 4$ taškais daugiau. Kadangi yra mokinių, užėmusių I-ą ir II-ą vietas, tai vienas mokinys turėjo gauti 15 taškų, o du po 14.

Atsakymas. Vienas mokinys pelnė I laipsnio, du mokiniai — II laipsnio ir du mokiniai — III laipsnio diplomus.

Pagrindinis šio skyrelio tikslas yra išmokyti nubraižyti funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \neq 0)$ grafiką. Šis skyrelis siejasi su 3 skyreliu, kur buvo braižoma parabolė $y = ax^2 + c$ $(c \neq 0)$. Čia remiamės tuo, kad funkcijos $y = f(x) + c$ reikšmės nuo funkcijos $y = f(x)$ atitinkamų reikšmių skiriasi skaičiumi c. Vadinasi, funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiką galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2 + bx$ per c vienetų (lygiagrečiai y ašiai). Šis parabolės braižymo būdas yra neįprastas, bet patogus, nes:
1) būdas remiasi parabole $y = ax^2 + bx$, kurią nubraižyti lengva;
2) supaprastėja parabolės viršūnės koordinačių nustatymas;
3) ypač palengvėja parabolės, kuri nekerta x ašies, braižymas.
Pastaba. Patys silpniausi mokiniai braižydami parabolę gali remtis reikšmių lentele.

Pakartoti:
ryšį tarp funkcijų $f(x) = ax^2$ ir $f(x) = ax^2 + c$ $(a, c \neq 0)$ atitinkamų reikšmių ir tų funkcijų grafikų;
kaip rasti parabolės $f(x) = ax^2 + bx$ $(b \neq 0)$ viršūnės koordinates.

Išmokti:
nubraižyti pilnosios kvadratinės funkcijos grafiką;
nustatyti parabolės $y = ax^2 + bx + c$ viršūnės koordinates;
remiantis grafiku nustatyti intervalus, kuriuose funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ didėjanti, kuriuose mažėjanti; kuriuose įgyja teigiamas reikšmes, neigiamas reikšmes; tašką, kuriame funkcija įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę.

Šiame skyrelyje:

1. Remiantis parabole $y = x^2 + 2x$ (kuri buvo nubraižyta praeitame skyrelyje) braižomas funkcijos $f(x) = x^2 + 2x + 3$ grafikas.

   Pastabos. 1) Silpnesnieji mokiniai gali pasidaryti funkcijų $f(x) = x^2 + 2x$ ir $f(x) = x^2 + 2x + 3$ reikšmių lenteles (kaip tai buvo daroma 3 skyrelyje).

   2) Visiems mokiniams būtina atlikti vadovėlyje pateiktą užduotį.

   3) Atkreipkite mokinių dėmesį į tašką, kuriame parabolė kerta y ašį.

2. Kaip įprasta, įrėmintame stačiakampyje pateikiamos parabolės $y = ax^2 + bx + c$ $(b, c \neq 0)$ ypatybės ir pasakoma, kaip ją galima nubraižyti remiantis parabole $y = ax^2 + bx$.

   Pastaba. Galima mokinių paprašyti pateiktuose brėžiniuose nurodyti taško, kuriame parabolė kerta y ašį, ordinatę.

3. Lentele pateikiamas algoritmas, remiantis kuriuo galima braižyti pilnosios kvadratinės funkcijos grafiką.

   Pastabos. 1) Pasiūlykite mokiniams lentelėje surasti korektūros klaidą (vadovėlyje neteisingai nurodyta parabolės viršūnės koordinatė y_0).

   2) Lentelę galima papildyti nurodant tašką, kuriame parabolė kerta y ašį.

   3) Galima paklausti mokinių, kaip rasti tas x reikšmes, kuriose parabolė kerta x ašį. Apytiksles reikšmes galima nustatyti remiantis brėžiniu, o algebriškai tai galima padaryti išsprendus kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ (pilnosios kvadratinės lygtys bus sprendžiamos 5 skyriuje).

   4) Šiame skyrelyje visos nubraižytos parabolės kerta x ašį. Todėl mokiniams gali susidaryti klaidingas įspūdis, kad taip turi būti visada. Paprašykite nurodyti tokias c reikšmes, kad, pavyzdžiui, parabolė $y = x^2 + 2x + c$ nekirstų x ašies ar su x ašimi turėtų vieną bendrą tašką.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

246–256 — teminiai pratimai; 257–261 — kartojimo pratimai. 45–71

246. Punktuose a), b), c), e) nurodytų parabolių šakos nukreiptos aukštyn, o punktuose d) ir f) — žemyn.
Simetrijos ašis:
a) $x = 2$; b) $x = -3$; c) $x = -2$; d) $x = 4$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.
Viršūnės koordinatės:
a) (2; 3); b) (−3; −3); c) (−2; −4); d) (4; −2); e) (4; 1); f) (2; 8).
Kerta y ašį taške:
a) (0; 7); b) (0; 6); c) (0; −2); d) (0; −18); e) (0; 33); f) (0; 4).
Nurodymas. Atlikus užduotį mokiniams galima pasiūlyti nubraižyti nurodytų funkcijų grafikus, remiantis turimais duomenimis. Galima patarti mokiniams braižant parabolę pažymėti parabolės viršūnę, tašką, kuriame parabolė kerta y ašį, ir jam simetrišką tašką parabolės simetrijos ašies atžvilgiu ir per tuos taškus braižyti parabolę.

247. Parabolės simetrijos ašį ir viršūnės koordinates reikia rasti dar nenubraižius pačios parabolės.

a) $x = -3$; $(-3; 2)$; $(-3; +\infty)$; $(-\infty; -3)$;
b) $x = 4$; $(4; -2)$; $(4; +\infty)$; $(-\infty; 4)$;
c) $x = 3$; $(3; 3)$; $(-\infty; 3)$; $(3; +\infty)$;
d) $x = -5$; $(-5; 1)$; $(-\infty; -5)$; $(-5; +\infty)$;
e) $x = 1$; $(1; -3)$; $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$;
f) $x = 3$; $(3; 2)$; $(3; +\infty)$; $(-\infty; 3)$.

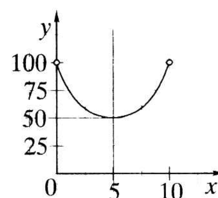
248. a) $f(x) = x^2 - 6x + 6$; b) $f(x) = x^2 + 4x + 2$;
c) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$; d) $f(x) = -1{,}5x^2 - 6x - 2$.

249. a) $x = -2$; $(-2; 1)$; 1; $(1; +\infty)$; b) $x = 3$; $(3; -4)$; -4; $(-4; +\infty)$;
c) $x = 1{,}5$; $(1{,}5; 0)$; 0; $(0; +\infty)$; d) $x = 4$; $(4; -2)$; -2; $(-\infty; -2)$;
e) $x = -2$; $(-2; 6)$; 6; $(-\infty; 6)$; f) $x = -0{,}5$; $(-0{,}5; 0)$; 0; $(-\infty; 0)$.

250. a) $(-\infty; -3)$, $(-1; +\infty)$; $(-3; -1)$; b) $\varnothing$; $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$;
c) $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$; $(2; 4)$; d) $(-4; -2)$; $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$;
e) $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$; $\varnothing$; f) $(1; 3)$; $(-\infty; 1)$, $(2; +\infty)$.

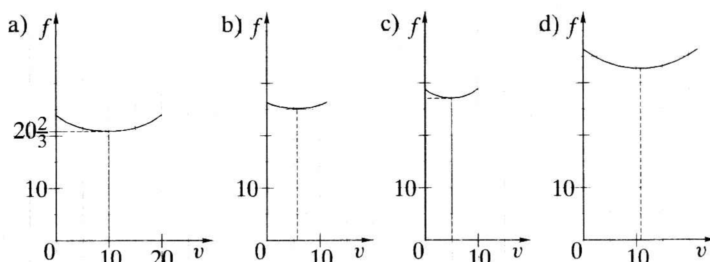
251. a) $b = -4$, $c = 3$; b) $b = 2$, $c = 4$; c) $b = 8$, $c = 4$; d) $b = -6$, $c = 2$.

252. a) Nuspalvinto kvadrato plotą galima gauti iš didžiojo kvadrato ploto atėmus keturių lygių stačiųjų trikampių plotų sumą. Viena stačiojo trikampio kraštinė yra x, o kita lygi $10-x$. Vieno stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2}x(10-x)$, o keturių tokių trikampių plotų suma lygi $2x(10-x)$. Nuspalvinto kvadrato plotas $y = 10^2 - 2x(10-x) = 100 - 20x + 2x^2$.
b) Pastebėkime, kad $0 < x < 10$. Todėl braižome parabolės $y = 2x^2 - 20x + 100$ dalį, kuri yra intervale $x \in (0; 10)$.
c) Mažiausia funkcijos reikšmė lygi 50.
d) Kai $x = 5$.



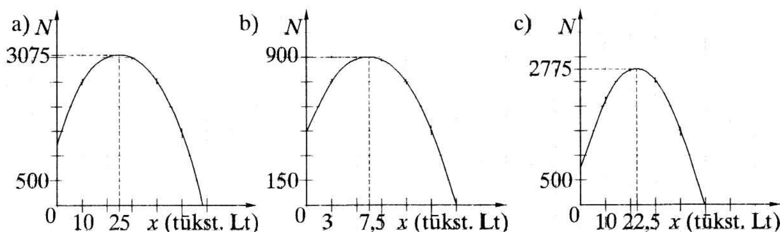
253. Mokiniai gali nesuprasti sąlygos. Tada paaiškinkite, kad kuo didesnis automobilio greitis ir kuo blogesnis kelias, tuo pasipriešinimo jėga yra didesnė. Braižome visų funkcijų, kai $v > 0$, grafikų dalį, esančią I ketvirtyje ($f > 0$).

b) punkte yra korektūros klaida. Turi būti $f = 28 - \frac{1}{4}v + \frac{1}{50}v^2$.



Atsakymas. Pasipriešinimas mažiausias važiuojant autostrada 10 km/h greičiu.

254. Funkcija $N(x)$ kvadratinė, jos grafikas — parabolės dalis. Kadangi parabolės šakos nukreiptos žemyn, parabolės viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. Raskime parabolės viršūnės abscisę:
a) parabolės $y = -3x^2 + 150x + 1200$ viršūnės abscisė lygi $25 \in [20; 50]$. Reklamai reikėtų išleisti 25 tūkstančius litų;
b) parabolės $y = -8x^2 + 120x + 450$ viršūnės abscisė lygi $7{,}5 \in [4; 20]$. Reklamai reikėtų išleisti 7,5 tūkstančio litų;
c) parabolės $y = -4x^2 + 180x + 750$ viršūnės abscisė lygi $22{,}5 \in [15; 30]$. Reklamai reikėtų išleisti 22,5 tūkstančio litų;



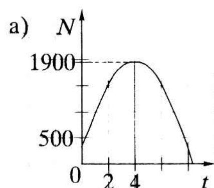
Atsakymas. a) 25 tūkst. Lt; b) 7,5 tūkst. Lt; c) 22,5 tūkst. Lt.

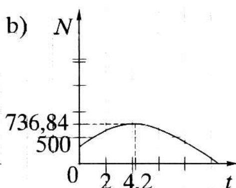
255. Funkcija $N(t)$ kvadratinė, jos grafikas — dalis parabolės, kurios šakos nukreiptos žemyn. Parabolės viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. Raskime parabolės viršūnės abscisę.

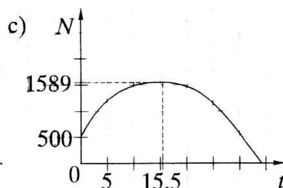
a) Parabolės $y = -100t^2 + 800t + 300$ viršūnės abscisė lygi $4 \in [0; 9]$. Po 4 h bakterijų kolonija ims nykti.

b) Parabolės $y = -19t^2 + 160t + 400$ viršūnės abscisė lygi $4\frac{4}{19} \in [0; 7]$. Bakterijų kolonija ims nykti maždaug po 4 h.

c) Parabolės $y = -4{,}5t^2 + 140x + 500$ viršūnės abscisė lygi $15\frac{5}{9} \in [0; 25]$. Bakterijų kolonija ims nykti maždaug po 15,5 h.





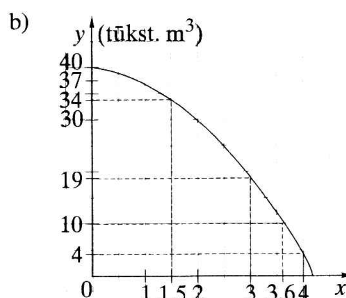


Atsakymas. a) Po 4 valandų; b) maždaug po 4 valandų ir 10 minučių; c) maždaug po 15 su puse valandos.

256. a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	40	37	30	19	4

b)

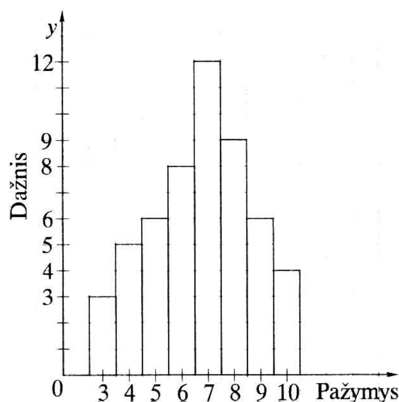


c) $x \approx 3{,}6$;
d) ≈ 34 tūkst. m^3;
e) 4 tūkst. m^3.

257. *Atsakymas.* a) 30 cm, 30 cm, 36 cm; b) 24 cm; c) 432 cm^2; d) 28,8 cm.

258. a) 0,4; b) $4\frac{10}{21}$.

259. a)



b) $\frac{357}{53} \approx 6{,}7$.

260. a) $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = (m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$;
b) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = a^2 - (b + c)^2 = (a - b - c)(a + b + c)$.

261. Per 1 s vienas vaikas eskalatoriumi nueina $1{,}5 + 1 = 2{,}5$ (m), o kitas — $1{,}5 - 1 = 0{,}5$ (m), todėl jie vienas prie kito priartėja $2{,}5 + 0{,}5 = 3$ (m). Vaikai susitiks po $12 : 3 = 4$ (s). Vadinasi, atstumas nuo artimesnio eskalatoriaus galo iki vaikų bus $0{,}5 \cdot 4 = 2$ (m).

Atsakymas. **B**.

Tai labai svarbus skyrelis. Jo pagrindinis tikslas yra parodyti, kaip grafiškai galima spręsti lygtis ir nelygybes. Tuo tikslu tenka braižyti kairėje ir dešinėje lygties (nelygybės) pusėse esančių funkcijų grafikus.

Žinoma, taip spręsdami dažniausiai nustatome tik apytikslius sprendinius. Suprantama, kad tikslius sprendinius randame spręsdami algebriškai. Bet kol kas mokiniai algebriškai moka spręsti pirmojo laipsnio ir nepilnąsias antrojo laipsnio lygtis. Tuo tarpu geometriškai galima spręsti ir racionaliąsias, ir pilnąsias kvadratines lygtis, nes jau buvo mokoma braižyti funkcijų $f(x) = kx + b$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikus.

Pakartoti:

funkcijų $f(x) = kx+b$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ grafikus;

ką vadiname lygties (nelygybės) sprendiniu.

Išmokti:

funkcijų grafikų bendrų taškų savybę;

grafiškai spręsti lygtis (nelygybes).

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami žinomų funkcijų $f(x) = kx+b$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikų eskizai.

   Pastabos. 1) Silpnesnieji mokiniai gali būti primiršę funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$ grafiką, todėl galite liepti nubraižyti kelių tokių funkcijų grafikus.

   2) Paaiškinkite mokiniams, kad remiantis grafikais galima spręsti įvairius uždavinius, grafikas suteikia daug informacijos apie pačią funkciją.

2. Pateikiama ir pavyzdžiu paaiškinama labai svarbi funkcijų grafikų susikirtimo taško savybė:

   Dviejų funkcijų grafikų susikirtimo taške funkcijų reikšmės yra lygios.

   Pastabos. 1) Šią savybę reikėtų patikslinti: Dviejų funkcijų grafikų susikirtimo (lietimosi) taške funkcijų reikšmės yra lygios.

   2) Vadovėlyje pateiktą pavyzdį rekomenduojame labai rimtai išsiaiškinti su mokiniais. Jie turi suprasti, kad:

   - kai $x = 1$, tai $2x = 3 - x$;
   - kai $x < 1$, tai $2x < 3 - x$;
   - kai $x > 1$, tai $2x > 3 - x$.

   (Tuo galima įsitikinti algebriškai išsprendus anksčiau užrašytas lygtis ir nelygybes.)

3. Išsprendžiami 3 uždaviniai siekiant parodyti pavyzdžius uždavinių, kurie gali būti sprendžiami grafiškai.

   Pastaba. Mokiniai, kurie supras šiuos uždavinius, lengviau įsisavins lygčių ir nelygybių sistemų sprendimą, kvadratinių nelygybių sprendimą, intervalų metodą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

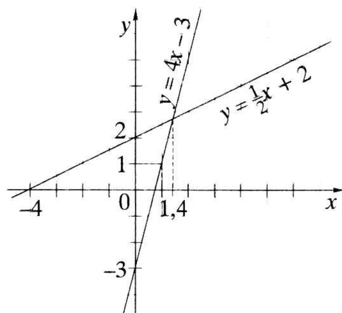
262–274 — teminiai pratimai; 275–280 — kartojimo pratimai.

72–77, 81

262. a) $f(x) = x + 1$; b) $f(x) = \frac{3}{x}$; c) $f(x) = -\frac{1}{2}x$;
d) $f(x) = \frac{4}{9}(x + 1)^2$; e) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kai } x < 3, \\ 5 - x, & \text{kai } x \geqslant 3; \end{cases}$ f) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2$;
g) $f(x) = 3$; h) $f(x) = -x - 2$.

263. a) (2; 10); b) $2x + 6 = 5x$, $x = 2$; $y = 5 \cdot 2 = 10$.

264. a)



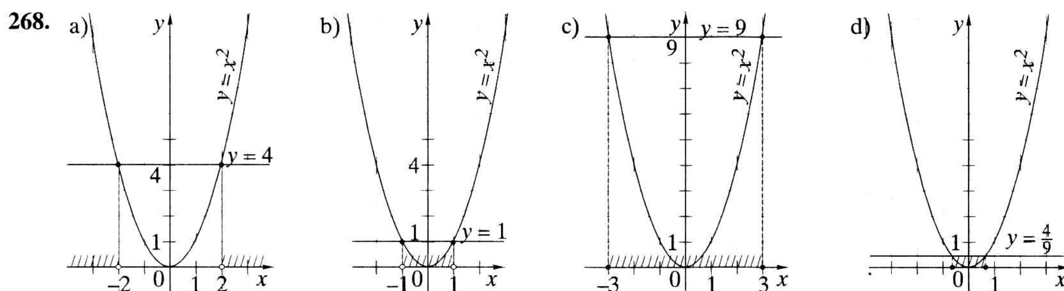
b) $\approx 1{,}4$; c) $x \geqslant 1{,}4$.

Nurodymai. 1) Galima liepti pateiktas lygtį ir nelygybę išspręsti algebriškai.
2) Norint nustatyti lygties sprendinių skaičių, pakanka funkcijos scheminio grafiko, nes šiuo atveju svarbu nustatyti tik grafikų bendrų taškų skaičių. Tuomet, kai reikia išspręsti lygtį arba nelygybę, funkcijų grafikus braižome kuo tiksliau.

265. a), b) — du sprendiniai; c), d) — sprendinių nėra.

266. a), b), c), d) — vienas sprendinys.

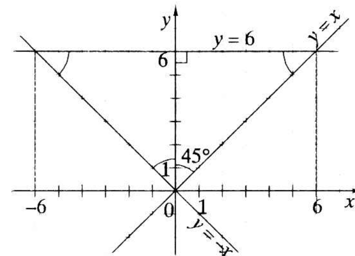
267. a) $x_1 \approx -4{,}3$, $x_2 \approx 0{,}8$, $x_3 \approx 3{,}5$; b) $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 3$;
c) $x_1 \approx -1{,}8$, $x_2 \approx 2{,}3$; d) $x_1 \approx -1$, $x_2 \approx 3$.

268. 

Atsakymas. a) $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; b) $(-1; 1)$; c) $[-3; 3]$; d) $[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$.

269. Tiesės $y = x$ ir $y = -x$ yra koordinatinių ketvirčių pusiaukampinės. Tiesėmis $y = x$, $y = -x$ ir $y = 6$ apribotas trikampis yra status.

Atsakymas. **E**.

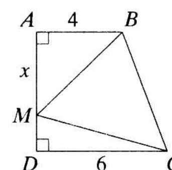


270. Kvadratas.

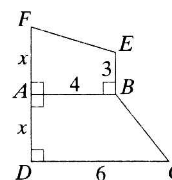
271. b) $[1{,}4; +\infty)$ (šiame intervale tiesė $y = 5x + 2$ yra ne žemiau tiesės $y = 5$);
c) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ (šiame intervale tiesė $y = -3x+4$ yra ne aukščiau tiesės $y = 5$).

272. c) $(2; 4)$, $(0{,}8; -0{,}2)$, $(-16; 4)$.

273. a) $0 < x < 5$;
b) $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4 = 2x$; $S_{DMC} = \frac{1}{2}(5 - x) \cdot 6 = 3(5 - x) = 15 - 3x$;
$S_{ABCD} = \frac{(4+6)\cdot 5}{2} = 25$; $S_{BMC} = 25 - 2x - (15 - 3x) = 10 + x$.
d) $S_{ABM} = S_{MCD}$, kai $x = 3$;
e) $S_{BMC} = S_{MCD}$, kai $x = 1{,}2$.



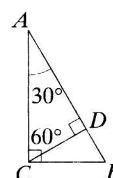
274. Dvi stačiosios trapecijos turi bendrą kraštinę $AB = 4\,\text{cm}$.
a) $S_{ABCD} = \frac{(4+6)\cdot x}{2} = 5x$; $S(x) = 5x$;
b) $S_{ABEF} = \frac{(x+3)\cdot 4}{2} = 2x + 6$; $Q(x) = 2x + 6$;
c) $x = 2$;
d) $0 < x < 2$.



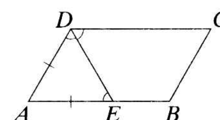
275. a) Kadangi tarp 49 medelių yra 48 tarpai po 3 metrus, tai eilės, kurioje sodinami medeliai, ilgis yra 144 metrai.
Jeigu tarpai būtų po 4 metrus, tai vienoje eilėje tilptų 37 medeliai; jeigu tarpai būtų po 6 metrus — 25 medeliai; jeigu tarpai būtų po 8 metrus — 19; jeigu tarpai būtų po 12 metrų — 13.
b) 400.

Uždavinį galima spręsti apibendrintai — pagal formulę $M = \frac{(49-1)\cdot 3}{n} + 1$ (čia $n = 4$; 6; 8 ir 12).

276. a) $15 + 5\sqrt{3}\,\text{cm}$;
b) Kadangi $10^2 = (5\sqrt{3})^2 + 5^2$, tai trikampis yra statusis, kurio vieno statinio ilgis du kartus mažesnis už įžambinės ilgį. Vadinasi, trikampio kampų didumai yra 30°, 60°, 90°;
c) $12{,}5\sqrt{3}\,\text{cm}^2$;
d) $2{,}5\sqrt{3}\,\text{cm}$;
e) $DB = 2{,}5\,\text{cm}$; $AD = 7{,}5\,\text{cm}$.



277. $AE + EB = 3x + 2x = 10$, $x = 2\,\text{cm}$; $AE = 6\,\text{cm}$; $EB = 4\,\text{cm}$;
a) $AD = AE = 6\,\text{cm}$;
b) 32 cm.



278. a) 1; b) 2; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{2}{9}$.

279. a) Sakykime, kad autobuso greitis yra x km/h. Tuomet $x + (x + 20) = 2x + 20$ — atstumas (km), kurį nuvažiuoja abu automobiliai per 1 valandą. Sudarome lygtį: $(2x + 20) \cdot 1\frac{13}{36} = 245$; $x = 80$;
b) x km/h — lengvojo automobilio greitis; $x + (x - 20) = 2x - 20$ — atstumas (km), kurį nuvažiuoja abu automobiliai per 1 valandą. Sudarome lygtį: $(2x - 20) \cdot 1\frac{13}{36} = 245$; $x = 100$.
Atsakymas. Autobuso greitis — 80 km/h, lengvojo automobilio greitis — 100 km/h.

280. Kadangi keturženklis skaičius yra 90 kartotinis, tai jis dalijasi ir iš 10, ir iš 9. Todėl keturženklio skaičiaus paskutinis skaitmuo 0, o priešpaskutinis — $(8 + 3 + 7 = 18)$. Vadinasi, $8370 : 90 = 93$.
Atsakymas. **B**.

3. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Šiame skyriuje mokoma spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

Su *sistemos* sąvoka mokiniai susipažino 8 klasėje nagrinėdami nelygybių su vienu kintamuoju sistemas, sudarytas iš dviejų nelygybių (Matematika 8, II dalis, 7 skyrius, 6 skyrelis). Mokiniai, kurie suprato, kas yra nelygybių sistemos sprendinys, ką reiškia išspręsti nelygybių sistemą, turėtų nesunkiai įsisavinti ir lygčių sistemų sprendimą. Palengvinti šio skyriaus mokymą turi ir tai, kad mokiniai yra susipažinę su tiesine funkcija (1 skyrius, 3–5 skyreliai).

Labai svarbu, kad mokiniai:

- suprastų, kas yra lygčių sistemos sprendinys;
- suprastų, ką reiškia išspręsti lygčių sistemą;
- suvoktų grafinio lygčių sistemos sprendimo būdo esmę;
- gebėtų išspręsti lygčių sistemą bent vienu algebriniu būdu (keitimo arba sudėties);
- gebėtų spręsti uždavinius sudarydami lygčių sistemas.

Svarbiausia siekti, kad *visi* mokiniai išmoktų spręsti paprastus *tekstinius* uždavinius sudarydami lygčių sistemą.

Šio skyriaus privaloma teorinė medžiaga pateikiama tradiciškai:

1) įvedamos tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais ir jos sprendinio sąvokos (3.1 skyrelis);

2) įvedamos dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos ir jos sprendinio sąvokos bei mokoma tokias sistemas spręsti grafiniu būdu (3.2 skyrelis);

3) mokoma lygčių sistemas spręsti keitimo (3.3 skyrelis) ir sudėties (3.4 skyrelis) būdais.

Nurodymai. 1) Privalomoje medžiagoje nagrinėjamos tik tokios dviejų tiesinių lygčių sistemos, kurios turi vienintelį sprendinį. Atvejai, kai lygčių sistema sprendinių neturi ar turi jų be galo daug, neįeina į pagrindinės mokyklos programą, todėl aptariami pilkame fone ir yra neprivalomi (3.5 skyrelis).

2) Vadovėlyje aiškinant tiek keitimo, tiek sudėties būdus nenurodoma, kad spręsdami lygčių sistemas atliekame *ekvivalenčius pertvarkius.* Kadangi lygčių ir lygčių sistemų ekvivalentumo sąvokos neįtrauktos į pagrindinės mokyklos programą, tai šie klausimai trumpai aptarti neprivalomame 3.6 skyrelyje.

3) 10 klasėje bus nagrinėjamos dviejų lygčių sistemos, kai viena sistemos lygtis yra netiesinė.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti algebriškai išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, turinčią vieną sprendinį.
2. Gebėti patikrinti, ar nurodyta skaičių pora yra duotosios lygčių sistemos sprendinys.
3. Gebėti spręsti paprasčiausius tekstinius uždavinius sudarant lygčių sistemą.
4. Gebėti rasti tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais keletą sprendinių.

Pagrindinis lygmuo:

5. Gebėti tiesinių lygčių sistemas, turinčias vieną sprendinį, spręsti grafiniu, keitimo ir sudėties būdais.
6. Suprasti, kad tiesinių lygčių sistemą sprendžiant grafiškai dažniausiai galima nustatyti tik apytikslius sistemos sprendinius.
7. Atpažinti tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais. Suprasti, kad tokia lygtis turi be galo daug sprendinių. Gebėti pavaizduoti visus sprendinius koordinačių plokštumoje.

Aukštesnis lygmuo:

8. Gebėti nusakyti lygčių sistemų sprendimo būdų — grafinio, keitimo ir sudėties — algoritmus.
9. Gebėti nustatyti, kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema, ir paaiškinti, kodėl.
10. Suprasti lygčių ir lygčių sistemų ekvivalentumo sąvoką. Žinoti, kokie pertvarkiai yra ekvivalentūs.

3.1. Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais

Lygties sąvoka mokiniams žinoma. (Mokiniai turėtų žinoti, kad lygtimi vadinama lygybė, kurioje yra nežinomasis.) Ligi šiol mokykloje buvo nagrinėjamos ir sprendžiamos lygtys su *vienu* nežinomuoju. Šiame skyrelyje įvedama *tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais* sąvoka, apibrėžiamas jos sprendinys, mokoma sprendinius vaizduoti grafiškai — nubrėžti *lygties* grafiką ir atvirkščiai — iš grafiko nustatyti lygties sprendinius. Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi be galo daug sprendinių (skirtingai negu tiesinė lygtis su vienu nežinomuoju).

Pakartoti:

ką vadiname lygtimi;
kas yra lygties su vienu nežinomuoju sprendinys;
tiesinės funkcijos $y = kx + b$ grafiko braižymą.

Išmokti:

ką vadiname lygtimi su dviem nežinomaisiais;
kas yra lygties su dviem nežinomaisiais sprendinys;
patikrinti, ar skaičių pora yra tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinys;
rasti kelis tokios lygties sprendinius;
pavaizduoti tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinius koordinačių plokštumoje.

Šiame skyrelyje:

1. Parodoma, kad sprendžiant tekstinį uždavinį su dviem nežinomais dydžiais galima sudaryti lygtį su dviem nežinomaisiais. Paaiškinama, kad uždavinys turi ne vieną sprendinį. Nagrinėjant šį uždavinį įvedama tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sąvoka:

> *Tiesine lygtimi su dviem nežinomaisiais vadiname lygtį, kurią galima užrašyti pavidalu $ax + by = c$; čia x ir y — nežinomieji, a, b ir c — skaičiai.*

Pastaba. Kodėl lygtį pavidalo $ax + by = c$ patogu vadinti *tiesine*, paaiškinta teorinės dalies pabaigoje.

Pasakoma, kas yra tokios lygties sprendinys:

> *Lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri paverčia tą lygtį teisinga skaitine lygybe.*

Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad ne visi gautos lygties sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą. Tam skirta 1 užduotis. Pratinkite mokinius prieš rašant atsakymus tikrinti gautus sprendinius (kur tai įmanoma), reikalaukite, kad mokiniai dar kartą perskaitytų sąlygą, dar kartą pasižiūrėtų, ko klausiama, ir įvertintų gautą rezultatą.

2. Pavyzdyje nagrinėjama konkreti tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais. Parodoma *kaip* galima rasti tos lygties sprendinius. Pabrėžiama, kad tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi be galo daug sprendinių. Pastebima, kad lygties $ax + by = c$ sprendiniai yra išsidėstę tiesėje, kuri yra atitinkamos tiesinės funkcijos $y = kx + b$ grafikas. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog visi lygties sprendiniai yra išsidėstę tiesėje ir atvirkščiai, — kad kiekvieno tiesės taško koordinatės yra tos lygties sprendiniai.

Pastaba. Šiame skyrelyje nemokoma, kaip užrašyti visus tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinius. (Lygties $3x + y = 5$ visus sprendinius galima užrašyti, pavyzdžiui, taip: $(t; 5 - 3t)$, $t \in \mathbf{R}$.) To nereikia reikalauti ir iš mokinių. Svarbu, kad mokiniai mokėtų sprendinius pavaizduoti grafiškai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 281–295 pratimai; kartojimui — 281–290 pratimai.

Pastabos. 1) Kituose skyreliuose bus nagrinėjamos dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos, o tai siejasi su nelygybių sistemomis (nelygybių sistemos buvo nagrinėtos 8 klasėje). Todėl mokytojai galėtų pateikti keletą nelygybių sistemų siekiant pakartoti jų sprendinio suvokimą.

2) Šiame skyrelyje, kaip ir kitame (3.2), nėra realaus turinio uždavinių, nors teorinėje šių skyrelių dalyje nagrinėjamos realios situacijos. Realaus turinio uždaviniai bus pateikti 3.3 ir 3.4 skyreliuose. Mokytojai patys galėtų tokių uždavinių pateikti mokiniams.

3) Stipresniems mokiniams galima pateikti uždavinių, kur reikėtų parašyti tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kai žinomi du tos lygties sprendiniai, arba kai nubraižyta tiesė, vaizduojanti lygties sprendinius. (Tai galima padaryti išsprendus 286 pratimą.)

1–10

281–284 pratimus galima spręsti mintinai.

281. a) Lygybė $2 \cdot 4 - 3 = 5$ yra teisinga, todėl $x = 4$ ir $y = 3$ yra lygties $2x - y = 5$ sprendinys.

Atsakymas. a), c) — taip; b), d) — ne.

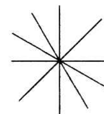
282. *Atsakymas.* Skaičių pora $(1\frac{1}{3}; 2)$ yra lygties $3x + y = 6$ sprendinys.
Nurodymas. Kaip mokiniai suras kitus du kuriuos nors duotosios lygties sprendinius, nėra svarbu. Svarbu tik, kad mokiniai mokėtų parodyti, jog nurodytos skaičių poros paverčia lygtį teisinga skaitine lygybe.

283. $(7; 0)$, $(3; 1)$, $(-1; 2)$, $(6; \frac{1}{4})$.

284. a) Tam, kad skaičių pora $(0; y)$ būtų lygties $5x + 2y = 10$ sprendinys, turi galioti lygybė: $5 \cdot 0 + 2y = 10$. Iš čia gauname, kad $y = 5$.
b) $x = 2$; c) $y = -5$; d) $x = 10$.

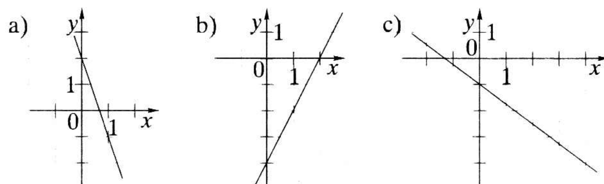
285. Šiuo uždaviniu mokoma, kad ieškant lygties su dviem nežinomaisiais sprendinių galima (tiesa, ne visada) vieną nežinomąjį išreikšti kitu nežinomuoju, pvz., duotąją lygtį su dviem nežinomaisiais x ir y užrašyti pavidalu $y = f(x)$. Po to laisvai parinkus x reikšmes apskaičiuoti atitinkamas y reikšmes. Išreikšti vieną nežinomąjį kitu ypač bus reikalinga sprendžiant sistemas keitimo būdu. Todėl, supratus šį uždavinį, bus lengviau įsisavinti 3-jo skyrelio medžiagą.
a) $y = -5x + 10$; b) $y = -1{,}5x + 3$; c) $y = 0{,}7x$;
d) $y = -4x + 12$. *Nurodymas.* Patogu abi lygties puses padauginti iš 4;
e) $y = 3x - 7$. *Nurodymas.* Patogu abi lygties puses padalyti iš 0,4 (arba padauginti iš 10 ir po to padalyti iš 4);
f) $y = 2x - 25$. *Nurodymas.* Patogu abi lygties puses padauginti iš trupmenų bendrojo vardiklio.
Mokinių nurodyti sprendiniai priklausys nuo pasirinktų x reikšmių. Patarkite moksleiviams imti „patogias“ x reikšmes, pvz., b) dalyje $x = 2$; c) dalyje $x = 10$ ir pan. Be to, pastebėkite, kad visuomet patogu imti reikšmę $x = 0$.

286. Galima sudaryti be galo daug tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais, kurių sprendinys būtų nurodyta skaičių pora. Grafiškai tai galima paaiškinti taip: per vieną duotąjį tašką galima nubrėžti be galo daug tiesių.

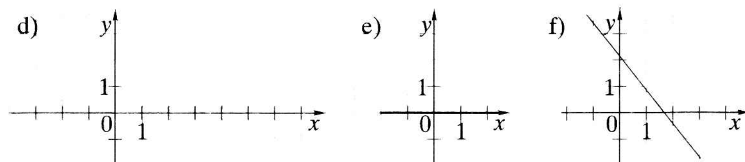


Pavyzdyje parodyta, kaip galima spręsti šį uždavinį: lygties $ax + by = c$ koeficientus a ir b pasirenkame laisvai, o reikšmę c gausime atsižvelgę į tai, kad nurodyta skaičių pora turi būti lygties sprendinys, t. y. vietoj x ir y įstatę duotąsias reikšmes.
Atsakymai priklausys nuo pasirinktų a ir b reikšmių.
Patarkite mokiniams, kad jie nesirinktų lygių nuliui a ar b reikšmių, nes tada „pradingsta“ vienas iš nežinomųjų.
Aišku, sudaryti lygtį galima samprotaujant ir kitaip negu parodyta pavyzdyje. Paprasčiausia ieškoti lygties, kurios pavidalas yra $x + y = c$; pvz., a) dalyje lygtis būtų $x + y = 4$.
Nurodymas. Tai kiek neįprastas ir mokiniams gali būti sunkiau išsprendžiamas uždavinys, bet būtų gerai, kad jį mokėtų išspręsti visi mokiniai.

287. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog visi lygties $ax + by = c$ sprendiniai $(x; y)$, pavaizduoti koordinačių plokštumoje taškais, yra išsidėstę vienoje tiesėje. Nubrėžti tai tiesei pakanka rasti dviejų taškų koordinates, kurios yra duotosios lygties sprendiniai. Kad lengviau būtų skaičiuoti, patarkite mokiniams pasirinkti „patogias“ kurio nors nežinomojo reikšmes. Taip pat nepatartina imti gretimų vieno nežinomojo reikšmių.



Sprendžiant d) ir f) punktus pirmiausia lygtis reikia suprastinti ir užrašyti pavidalu $ax + by = c$:
d) $4(x + y) - 5(x - y) = 3$, $-x + 9y = 3$;
e) $0x - y = 0$, $y = 0$; x — bet koks, $y = 0$, t. y. x-ų ašis;
f) $(2x + 1)^2 - (4x^2 - 3y) = 8$, $4x + 3y = 7$.



Nurodymas. Sprendžiant 288–290, 291b ir 292 uždavinius patogu išreikšti kurį nors lygties nežinomąjį kitu, o lygties sprendinius surašyti lentele.

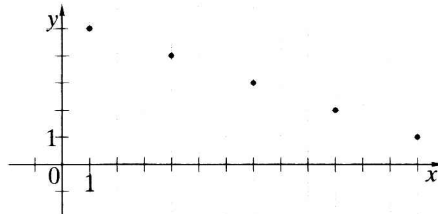
288. $x + y = 5$, $y = 5 - x$. Iš gautos išraiškos matome, kad x reikšmės gali būti tik 1, 2, 3 ir 4.

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

Atsakymas. (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1).

289. $x+3y = 16$, $x = 16-3y$;

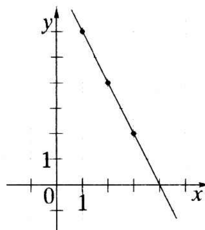
y	1	2	3	4	5
x	13	10	7	4	1



Atsakymas. (13; 1), (10; 2), (7; 3), (4; 4), (1; 5).

290. $2x + y = 8$, $y = 8 - 2x$;

x	1	2	3
y	6	4	2



Duotosios lygties natūralieji sprendiniai koordinačių plokštumoje pažymėti taškais. Per šiuos taškus einančioje tiesėje yra visi duotos lygties sprendiniai.

291. a) Sakykime, kad Saulius pirko x sąsiuvinių ir y pieštukų. Tada visas pirkinys kainavo $2x + y = 6$; čia x ir y gali įgyti tik natūraliąsias reikšmes. Atsakant į klausimą pakanka nurodyti bent vieną šios lygties sprendinį.

Tai svarbus uždavinys.

b) Čia jau prašoma nurodyti *visus* natūraliuosius lygties $2x+y = 6$ sprendinius. Taigi Saulius galėjo pirkti 1 sąsiuvinį ir 4 pieštukus, arba 2 sąsiuvinius ir 2 pieštukus.

x	1	2
y	4	2

292. Sakykime, kad Justė surinko x monetų 50 centų vertės ir y monetų 20 centų vertės. Tuomet sutaupytą 3 litų (300 centų) sumą galima užrašyti lygybe:
$50x + 20y = 300$. Gavome lygtį su dviem nežinomaisiais, kur x ir y gali įgyti tik natūraliąsias reikšmes ir *nulį*. Iš gautos lygties išsireiškiame y:
$y = 15 - 2{,}5x$.
Surasti galimas x ir y reikšmes yra sunkiau nei anksčiau spręstuose pavyzdžiuose. Pavyzdžiui, kai $x = 1$, tai $y = 15 - 2{,}5 = 12{,}5$, ir gautas lygties sprendinys netiks, nes y nėra natūralusis skaičius. Iš išraiškos $y = 15 - 2{,}5x$ nesunku suprasti, kad x reikšmės gali būti tik 0, 2, 4 ir 6.

x	0	2	4	6
y	15	10	5	0

Atsakymas. Taupyklėje galėjo būti 15 monetų po 20 ct; 2 monetos po 50 ct ir 10 monetų po 20 ct; 4 monetos po 50 ct ir 5 monetos po 20 ct; 6 monetos po 50 ct.

293. Taškas priklauso tiesei, kai jo koordinatės tenkina tos tiesės lygtį.

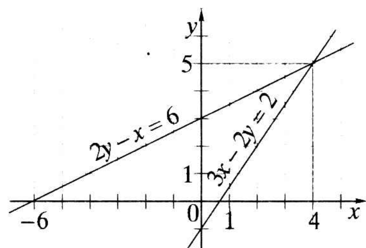
Kadangi $-8 \neq 5 \cdot 1 - 3$, tai taškas $(1; -8)$ nepriklauso tiesei $y = 5x - 3$.
Pastaba. Kai kurie mokiniai panašius uždavinius bando spręsti grafiškai, t. y. brėždami duotąją tiesę. Reikia mokiniams paaiškinti, kad toks sprendimo būdas neracionalus; be to, remiantis brėžiniu gali nepavykti teisingai nustatyti, ar tiesė eina per duotąjį tašką.

294. *Nurodymas.* Uždavinys analogiškas 293 uždaviniui: reikia patikrinti, ar duoto taško koordinatės tenkina duotos tiesės lygtį.

Šio uždavinio taip pat nepatartina spręsti grafiškai.

Atsakymas. a) Taip; b) ne.

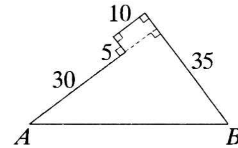
295.



Tiesės kertasi taške (4; 5).

Galima atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad taškas (4; 5) yra vienintelis taškas, kuris priklauso abiem tiesėms.

296. a) Kai $x = 5$, $y = 5$, tai $5 = a \cdot 5^2$ ir $a = \frac{1}{5}$;
b) Kai $x = -4$, $y = 6$, tai $6 = a \cdot (-4)^2$, ir $a = \frac{3}{8}$.



297. $AB = \sqrt{(35-5)^2 + (30+10)^2} = 50$ (ilg. v.);
$P = 50 + 30 + 5 + 10 + 35 = 130$ (ilg. v.);
$S = \frac{40 \cdot 30}{2} + 5 \cdot 10 = 600 + 50 = 650$ (kv. v.).

298. *I būdas.*

$$\begin{matrix} 60\,\text{s} — 24 \text{ kartus}, \\ 1\,\text{s} — x \text{ kartų}; \end{matrix} \Rightarrow \frac{60}{1} = \frac{24}{x}, x = \frac{2}{5} \text{ (karto)}.$$

Vadinasi, per 1 sekundę ratas pasisuka $360° \cdot \frac{2}{5} = 144°$ kampu.

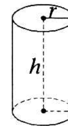
II būdas.

$$\begin{matrix} 60\,\text{s} — 360° \cdot 24, \\ 1\,\text{s} — x; \end{matrix} \Rightarrow x = 144°.$$

Atsakymas. **D.**

Žinoma, nebūtina spręsti sudarant proporciją. Galima spręsti ir samprotaujant kitaip. Be to, pateikti sprendimą uždavinyje ir nereikalaujama.

299. a) Sukant stačiakampį apie ilgesniąją kraštinę: $r = 10$, $h = 15$;
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h) = 500\pi$ (cm^2);
$V = S_{\text{pagr}} \cdot h = \pi r^2 h = 1500\pi$ (cm^3).
b) Sukant stačiakampį apie trumpesniąją kraštinę: $r = 15$, $h = 10$;
$S_{\text{pav}} = 750\pi$ cm^2; $V = 2250\pi$ cm^3.



300. $x + (x + 230) + (x + 460) + (x + 690) = 5120$, $x = 935$.
Atsakymas. 1625 detales.

301. *Nurodymas.* $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$;
Atsakymas. a) $6\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 16; d) 2; e) 24; f) 24; g) 144.

302. a) Sakykime, kad žmogaus ūgis yra x cm. Sudarome proporciją:

$$\begin{matrix} x\,\text{cm} — 100\%, \\ 39{,}3\,\text{cm} — 22\%; \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{39{,}3 \cdot 100}{22} \approx 179\,(\text{cm}).$$

b) Apskaičiuokime ūgį žmogaus, kurio alkūnkaulis buvo 20,3 cm ilgio:

$$\begin{matrix} x\,\text{cm} — 100\%, \\ 20{,}3\,\text{cm} — 16\%; \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{20{,}3 \cdot 100}{16} \approx 127\,(\text{cm}).$$

Apskaičiuokime ūgį žmogaus, kurio šeivikaulis buvo 38 cm ilgio:

$$\begin{matrix} y\,\text{cm} — 100\%, \\ 38\,\text{cm} — 22\%; \end{matrix} \Rightarrow y = \frac{38 \cdot 100}{22} \approx 173\,(\text{cm}).$$

Kadangi žmogaus ūgis, nustatytas pagal rastuosius kaulus, labai skiriasi, tai kaulai matyt negalėjo priklausyti tam pačiam žmogui.

3.2. Tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos. Grafinis sprendimo būdas

Mokiniai jau yra susipažinę su tiesinių nelygybių sistemomis ir jų sprendimu (Matematika 8, II dalis, 7.6 skyrelis).
Todėl būtų tikslinga prieš nagrinėjant lygčių sistemas pakartoti nelygybių sistemas pabrėžiant, kas yra nelygybių sistemos sprendinys.
Lygčių sistemos, kaip ir nelygybių sistemos, žymimos riestiniu skliaustu {.
Šiame skyrelyje mokoma grafiniu būdu spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas. Aišku, sprendžiant grafiniu būdu sprendinius dažniausiai galima nustatyti tik apytiksliai. (Tikslius sprendinius randame algebriniais būdais.) Bet tai nereiškia, kad grafinis sprendimo būdas yra nereikšmingas. Grafinė lygčių sistemos interpretacija padeda suvokti, kas yra lygčių sistemos sprendinys, kiek sprendinių turi lygčių sistema (šiame skyrelyje nagrinėjamos tik vieną sprendinį turinčios lygčių sistemos), todėl reikia siekti, kad mokiniai suvoktų šio skyrelio medžiagą ir nepamirštų jos ir tada, kai mokės lygčių sistemas spręsti algebriniais būdais.
Svarbiausia, kad mokiniai gerai įsisavintų lygčių sistemos sprendinio sąvoką, mokėtų pasinaudodami sistemą sudarančių lygčių grafikais nustatyti jos sprendinį.

Pakartoti:

tiesinių nelygybių sistemų sprendimą;
kur išsidėstę tiesinės lygties $ax + by = c$ sprendiniai.

Išmokti:

užrašyti lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą;
kas yra lygčių sistemos sprendinys, ir mokėti patikrinti, ar skaičių pora yra lygčių sistemos sprendinys;
remiantis sistemą sudarančių lygčių grafikais nustatyti tos sistemos sprendinį.

Šiame skyrelyje:

1. Papildoma praeitame skyrelyje nagrinėto tekstinio uždavinio sąlyga ir parodoma, kad uždavinio sprendimą galima aprašyti dviem tiesinėmis lygtimis su dviem nežinomaisiais.

   Parodoma, kaip remiantis lygčių grafikais galima rasti uždavinio atsakymą.

2. Remiantis nagrinėtu uždaviniu įvedama dviejų tiesinių lygčių sistemos sąvoka, jos žymėjimas, sprendinio sąvoka. Labai svarbu, kad mokiniai suvoktų, kas yra lygčių sistemos su dviem nežinomaisiais sprendinys:

   Lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri yra kiekvienos lygties sprendinys.

   Pastaba. Vadovėlyje nėra pasakyta, ką reiškia išspręsti lygčių sistemą. (Kad nagrinėtas uždavinys neturi kitų sprendinių, nesunku įsitikinti iš brėžinio — dvi tiesės turi tik vieną bendrą tašką. Kai mokiniai atsakys į klaustuku pažymėtą klausimą, pasiūlykite jiems įsitikinti, kad duotoji lygčių sistema turi tik vieną sprendinį.)

3. Pateikiamas tiesinių lygčių sistemų grafinio sprendimo būdo algoritmas.

   Pastaba. Svarbu atkreipti dėmesį, kad spręsdami grafiškai lygčių sistemos sprendinius ne visada galime rasti tiksliai. Tuomet iš brėžinio nustatome apytiksles reikšmes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

303–310 ir 313 — teminiai uždaviniai; 311, 312, 314–322 — kartojimo. 11–18

303. Šis uždavinys svarbus lygčių sistemos sprendinio sąvokos įtvirtinimui. Reikia pabrėžti, kad lygčių sistemos sprendinys yra tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri yra *kiekvienos* sistemos lygties sprendinys. Vadinasi, reikės patikrinti, ar duotoji skaičių pora ir vieną, ir kitą lygtį paverčia teisinga skaitine lygybe.

Atsakymas. a) Taip; b) ne.

304. a) $(2; 6)$; b) $(-4; 3)$; c) $(-4; 3)$.

305. Praeitame skyrelyje 286 uždavinyje buvo mokoma sudaryti tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kurios sprendinys būtų duotoji skaičių pora. Analogiškai spręsime ir šį uždavinį. Tik dabar reikės sudaryti dvi tokias lygtis, t. y. reikia rasti tokias koeficientų a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 reikšmes, kad sistemos $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ abi lygtys su duotąja nežinomųjų reikšmių pora virstų teisingomis lygybėmis. Mokiniai turi suvokti, kad tokių sistemų yra be galo daug.

a) Sudarykime vieną tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kurios vienas iš sprendinių būtų duotoji skaičių pora. Pasirinkime bet kokias nelygias nuliui a_1 ir b_1 reikšmes, pvz., $a_1 = 2$, $b_1 = -3$. Įstatę šias a_1 ir b_1 reikšmes į lygtį $a_1x + b_1y = c_1$ gauname $2x - 3y = c_1$. Kadangi skaičių pora $(5; 2)$ turi būti tos lygčių sistemos sprendinys, tai $2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = c_1$ ir $c_1 = 4$. Sudarėme vieną sistemos lygtį: $2x - 3y = 4$.

Sudarykime antrąją sistemos lygtį. Tegul $a_2 = 1$, $b_2 = 10$. Tada $x + 10y = c_2$ ir $5 + 10 \cdot 2 = c_2$, $c_2 = 25$. Taigi antroji lygtis yra $x + 10y = 25$. Gavome lygčių sistemą $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ x + 10y = 25. \end{cases}$

Pastaba. Sąlygoje nepasakyta, kad reikia sudaryti dviejų tiesinių lygčių sistemą. Todėl gudresniems mokiniams galite pasiūlyti sudaryti lygčių sistemą, kurioje nežinomieji būtų nebūtinai pirmojo laipsnio; sistemoje būtų daugiau negu dvi lygtys.

306. a) $x = 3$, $y = 2$; b) $x \approx 2{,}8$, $y \approx 2{,}7$; c) $x \approx 1{,}7$, $y \approx 0{,}4$.

Galima spręsti žodžiu.

Pastaba. Galima paprašyti mokinių sudaryti atitinkamą lygčių sistemą.

307. a) $\begin{cases} -x + y = 4, \\ x + 3y = 0, \end{cases}$ $x = -3$, $y = 1$;

b) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x - 5y = 12, \end{cases}$ $x = 6$, $y = 0$.

308. Sprendžiant šį uždavinį netikslinga braižyti lygčių grafikus, o reikia patikrinti, ar su duotomis nežinomųjų reikšmių poromis abi lygtys virsta teisingomis lygybėmis.

a) $7 - 2 \cdot 2 = 3$, $2 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 8$. Taip.

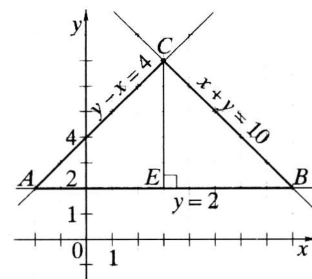
b) $1 - 2 \cdot (-1) = 3$, $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5 \neq 8$. Lygties $x - 2y = 3$ grafikas eina per tašką $B(1; -1)$, o lygties $2x - 3y = 8$ — ne.

c) Taškas A.

309. a) $(1; -5)$; b) $(4; 2)$; c) $(3{,}5; 2)$; d) $(0; -3)$.
Nurodymas. Sprendžiant c) ir d) punktus pirmiausia naudinga supaprastinti tiesių lygtis.

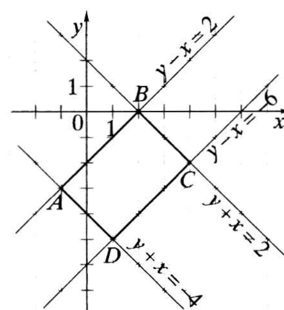
310. a) $(2; 2)$; b) $(-2; -1)$;
c) $(70; 280)$. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į mastelio pasirinkimą. Pavyzdžiui, patogu laikyti 1 langelį lygų 50 vienetų.

311. Galima samprotauti įvairiai:



I būdas. Trikampį sudaro 20 pilnų kvadratėlių, kurių plotas 1, ir 10 nepilnų kvadratėlių, kurių plotas 0,5. Vadinasi, $S_{ABC} = 20 + 10 \cdot 0{,}5 = 25$.
II būdas. Iš brėžinio nustatome, kad $AB = 10$, $CE = 5$, tai $S_{ABC} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$.
III būdas. Galima pastebėti, kad $\triangle ACB$ — status ($\angle C = 90°$), todėl $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$. Randame taškų A, B ir C koordinates: $A(-2; 2)$, $B(8; 2)$, $C(3; 7)$, bei apskaičiuojame AC ir CB ilgius: $AC = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$, $CB = \sqrt{(8 - 3)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$. Vadinasi, $S_{ACB} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} = 25$.
Nurodymas. Galite paprašyti rasti ir trikampio ABC perimetrą.

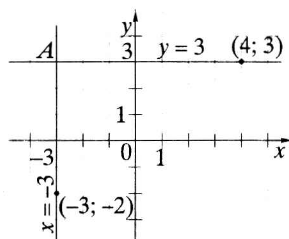
312. Galima spręsti, pavyzdžiui, taip:



I būdas. Stačiakampį sudaro 7 pilni kvadratėliai, kurių kiekvieno plotas 1, ir 10 nepilnų kvadratėlių, kurių kiekvieno plotas 0,5. Vadinasi, $S_{ABCD} = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 0{,}5 = 12$.
II būdas. Kraštinę AB sudaro 3 atkarpos, kurių ilgiai $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; kraštinę BC — dvi tokios atkarpos. Todėl $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12$.
III būdas. Randame atstumą tarp taškų B ir C (kraštinės BC ilgį) ir taškų D ir C (kraštinės DC ilgį): $BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, $DC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$. $S_{ABCD} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = 12$.

313. Kadangi taško $P(-2; 3)$ koordinatės yra ir vienos, ir kitos lygties sprendiniai, tai abi duotos tiesės eina per šį tašką.

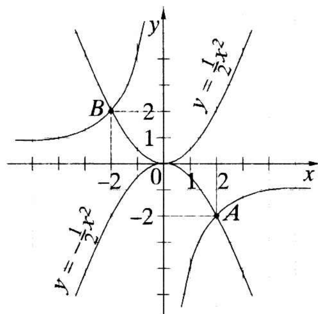
314.



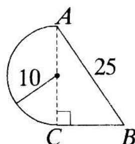
Tiesės kertasi taške $A(-3; 3)$.

315. a) $A(2; -2)$; b) $B(-2; 2)$.

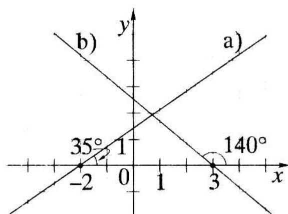
Patogu a) ir b) dalis spręsti viename brėžinyje.



316. $AC = 20$, $BC = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (ilg. v.);
$P = 25 + 15 + 10\pi = 40 + 10\pi$ (ilg. v.);
$S = \frac{20 \cdot 15}{2} + \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 150 + 50\pi$ (kv. v.).



317.



318. a) $1{,}2 \approx 1$; $|1 - 1{,}2| = 0{,}2$; $\frac{0{,}2}{1} = 0{,}2$, t. y. 20%;
b) $9{,}6 \approx 10$; $|10 - 9{,}6| = 0{,}4$; $\frac{0{,}4}{10} = 0{,}04$, t. y. 4%;
c) $0{,}66 \approx 1$; $|1 - 0{,}66| = 0{,}34$; $\frac{0{,}34}{1} = 0{,}34$, t. y. 34%;
d) $15{,}3 \approx 15$; $|15 - 15{,}3| = 0{,}3$; $\frac{0{,}3}{15} = 0{,}02$, t. y. 2%.

319. a) $(x + 2) + (x - 1) = 2x + 1$;
b) $(x + 2) - (x - 1) = 3$;
c) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$;
d) $2(x + 2) + (x - 1) = 3x + 3$;
e) $(x + 2) - 3(x - 1) = -2x + 5$;
f) $4(x + 2) - 0{,}5(x - 1) = 3{,}5x + 8{,}5$.

320. a) $b(a - c) - (a - c) = (a - c)(b - 1)$;
b) $(7a + an) - (7b + bn) = a(7 + n) - b(7 + n) = (7 + n)(a - b)$;
arba $(7a - 7b) + (an - bn) = 7(a - b) + n(a - b) = (a - b)(7 + n)$;
c) $(3y^3 - 2y^2) + (3y - 2) = y^2(3y - 2) + (3y - 2) = (3y - 2)(y^2 + 1)$;
arba $(3y^3 + 3y) - (2y^2 + 2) = 3y(y^2 + 1) - 2(y^2 + 1) = (y^2 + 1)(3y - 2)$;
d) $(ax^2 + bx^2 - cx^2) + (ax + bx - cx) = x^2(a + b - c) + x(a + b - c) =$
$= (a + b - c)(x^2 + x) = (a + b - c)x(x + 1) = x(x + 1)(a + b - c)$;
arba $(ax^2 + ax) + (bx^2 + bx) - (cx^2 + cx) = ax(x + 1) + bx(x + 1) -$
$- cx(x + 1) = (x + 1)(ax + bx - cx) = x(x + 1)(a + b - c)$.

321. a) 20%; b) 16%.

322. Kadangi 8 papūgos per 8 dienas sulesa 8 kg lesalo, tai viena papūga per 8 dienas sulesa 1 kg lesalo, o viena papūga per vieną dieną sulesa $\frac{1}{8}$ kg $= 125$ g lesalo.

Atsakymas. **B**.

3.3. Keitimo būdas

Praeitame skyrelyje mokiniai išmoko spręsti tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas grafiškai. Šiuo būdu galima išspręsti visas lygčių sistemas, bet ne visada taip surasti sprendiniai būna tikslūs. Tikslius sprendinius visada gauname, kai sistemas sprendžiame algebriniais būdais — keitimo arba sudėties.

Keitimo būdas labai svarbus, nes jis tinka ne tik tiesinių lygčių sistemų sprendimui.

Pakartoti, kaip išreikšti tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais bet kurį nežinomąjį.

Išmokti:

spręsti tiesinių lygčių sistemas keitimo būdu;
spręsti uždavinius sudarant lygčių sistemas.

Šiame skyrelyje:

1. Keitimo būdu išsprendžiama tiesinių lygčių sistema, kurios apytikslis sprendinys buvo surastas 2 skyrelyje (p. 104) sprendžiant ją grafiškai. Randamas tikslus šios lygčių sistemos sprendinys.

   Nurodoma, kad šį būdą ypač patogu taikyti tada, kai bent vienoje lygtyje koeficientas prie x ar y lygus 1 arba -1, nes tada labai lengva vieną nežinomąjį išreikšti kitu.

   Pastabos. 1) Galite paprašyti mokinių išspręsti 1 pavyzdžio sistemą išreiškus: iš antrosios lygties nežinomąjį x; iš pirmosios nežinomąjį y; iš pirmosios nežinomąjį x. Po to pasvarstykite, kaip spręsti buvo paprasčiau.

   2) Sprendžiant lygčių sistemas sprendimą galima apiforminti įvairiai. Pavyzdžiui:

   - visada rašyti sistemos ženklą:

   $$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + y = 6, \end{cases} \begin{cases} 3x - y = 3, \\ y = 6 - x, \end{cases} \begin{cases} 3x - (6 - x) = 3, \\ y = 6 - x, \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x = 2{,}25, \\ y = 6 - x, \end{cases} \begin{cases} x = 2{,}25, \\ y = 6 - 2{,}25, \end{cases} \begin{cases} x = 2{,}25, \\ y = 3{,}75; \end{cases}$$

   - sunumeruoti sistemos lygtis:

   $$\begin{cases} 3x - y = 3, & (1) \\ x + y = 6. & (2) \end{cases}$$

   (2): $y = 6 - x$. (3)
   $(3 \to 1)$: $3x - (6 - x) = 3$, $x = 2{,}25$. (4)
   $(4 \to 1)$: $3 \cdot 2{,}25 - y = 3$, $y = 3{,}75$.

   Žinoma, visai nesvarbu, kaip mes tai padarysime. Svarbiausia, kad būtų aišku, kas iš ko išplaukia ir ką darome.

2. Pateikiamas 2 pavyzdys, kuriame nei vienas koeficientas prie nežinomųjų nelygus 1 ar -1. Šiuo atveju tenka atlikinėti veiksmus su trupmeniniais reiškiniais. Todėl mokiniai čia gali klysti. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad spręsdami lygtį $5x+3\cdot\frac{16-7x}{4} = 11$ abi jos puses dauginome iš trupmenos vardiklio ir todėl būtina apskliausti tos trupmenos skaitiklyje esantį reiškinį.

3. Gana reikšmingas ir 3 pavyzdys, kuriuo parodoma, kad kartais sprendžiant lygčių sistemas keitimo būdu, patogu išreikšti ne y ar x, bet by ar ax. Žinoma, tokias sistemas galima spręsti ir sudėties būdu (padauginus vieną iš lygčių iš -1).

   Pastaba. Kai kuriems mokinams patinka sistemas spręsti vadinamuoju sulyginimo būdu, t. y. iš *abiejų* sistemos lygčių išreikšti tą patį nežinomąjį (reiškinį) ir sulyginti tų išraiškų kitoje pusėje esančius reiškinius. Tai galima pailiustruoti sprendžiant 3 pavyzdį:

   $$\begin{cases} 2x = 2 + 3y, \\ 2x = -6 + 5y, \end{cases} \Rightarrow 2 + 3y = -6 + 5y.$$

4. Skyrelio pabaigoje pateikiamas lygčių sistemų sprendimo keitimo būdu algoritmas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

323–337 — teminiai uždaviniai; 338–343 — kartojimo.

Pastaba. Uždavinyno 30–55 uždavinius galima spręsti tiek keitimo, tiek sudėties būdu. Jie parenkami mokytojo nuožiūra. Šiuos uždavinius galima spręsti ir visus mokslo metus. 19–27

323. *Nurodymas.* Pastebėkime, kad šio uždavinio lygčių sistemose vienos lygties kuris nors nežinomasis jau išreikštas kitu.

Atsakymas. a) (3; 11); b) (1; 1); c) $\left(-\frac{1}{4}; -1\frac{1}{4}\right)$.

324. Pratimas skirtas įgūdžių formavimui išreiškiant vieną nežinomąjį kitu.

a) $y = 3 - x$, $x = 3 - y$; b) $y = 4x - 6$, $x = \frac{6+y}{4}$;
c) $y = \frac{10-2x}{5}$, $x = \frac{10-5y}{2}$; d) $y = \frac{4+x}{6}$, $x = 6y - 4$;
e) $y = \frac{4x-24}{3}$, $x = \frac{3y+24}{4}$; f) $y = \frac{2-3x}{6}$, $x = \frac{2-6y}{3}$.

Punkte d) patogu pirmiausia abi lygties puses padauginti iš 2, punkte e) — iš 6, punkte f) — iš 10.

325. *Nurodymai.* 1) Visuose čia pateiktuose pratimuose koeficientas prie x ar y bent vienoje lygtyje lygus 1 ar -1. Todėl, žinoma, patogiausia vieną nežinomąjį išreikšti kitu būtent iš tų lygčių.

2) Sprendžiant g)–i) punktus išreiškus nežinomąjį, prie kurio koeficientas lygus 1 ar -1, gausime trupmeninius reiškinius. Tačiau panaikinę duotose lygtyse esamas trupmenas (abi lygties puses padauginę iš trupmenos vardiklio) gautume lygtis su sveikaisiais koeficientais, ir koeficientas prie vieno iš nežinomųjų būtų lygus 1 ar -1.

3) Punktuose h) ir g) lygčių nežinomieji yra pažymėti kitomis raidėmis (iki šiol visur buvo žymima x ir y). Todėl mokiniams gali kilti klausimas, kaip užrašyti atsakymą, t. y. kurio nežinomojo reikšmę nurodyti pirmiau. Galite mokiniams paaiškinti, kad nurodant sistemos sprendinius skaičių pora pirmiau rašomas pirmesnę abėcėlės raidę atitinkantis sprendinys. Jei mokiniai abejoja, kuri raidė yra pirmesnė, tai atsakymą gali pateikti nurodydami raides, kurios įgyja gautas reikšmes, pvz., punkte i) galima atsakyme rašyti $m = 31$, $n = 54$.

Atsakymas. a) (2; 5); b) (3; 1); c) (1,5; 4,5); d) (3; 5); e) (1; −4); f) (14; 5); g) (−8; 4); h) (2,25; 0,5); i) (31; 54).

326. Pastebėkime, kad:

a) patogu išreikšti $3x$;

b) abiejų lygčių dešiniosios pusės lygios, t. y. išreikšta $4x$, todėl nieko išreikškinėti ir nereikia;

c) antrosios lygties visi nariai dalijasi iš 5;

d) iš bet kurios lygties patogu išreikšti $5x$ (arba $-5x$), arba iš pirmosios y.

e) ir f) dalys yra neprivalomos. Čia pateiktos trijų lygčių su trim nežinomaisiais sistemos, bet jos taip pat nesunkiai išsprendžiamos keitimo būdu:

e) $\begin{cases} x + y + z = -54, \\ x = -6y, \\ z = 14y, \end{cases}$ $\begin{cases} -6y + y + 14y = -54, & (1) \\ x = -6y, & (2) \\ z = 14y, & (3) \end{cases}$

(1): $9y = -54$, $y = -6$;

(2): $x = -6y$, $x = -6 \cdot (-6) = 36$;

(3): $z = 14y$, $z = 14 \cdot (-6) = -84$;

Atsakymas. a) (7; −5); b) (4; 9); c) (3; 6); d) (4; 12); e) (36; −6; −84); f) (−1; 5; −4).

327. Funkcijų grafikų susikirtimo taško koordinatės yra sprendinys lygčių sistemos:

a) $\begin{cases} y = x - 1, \\ y = 3x + 3, \end{cases}$ (−2; −3); b) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ y = 6 - x, \end{cases}$ (4; 2).

328. 35 ir 21.

329. 2 Lt, 0,5 Lt.

330. Sakykime, kad turisto greitis miško keliu yra x km/h, o plentu — y km/h. Tada

$\begin{cases} x + 4 = y, \\ 2x + y = 28, \end{cases}$ $x = 8$, $y = 12$.

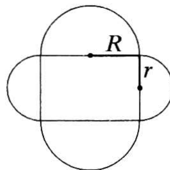
Atsakymas. 8 km/h, 12 km/h.

331. $\begin{cases} x - y = 24, \\ x + y + 40 = 180, \end{cases}$ $x = 82$, $y = 58$.

Atsakymas. 58°, 82°.

332. $\begin{cases} R - r = 3, \\ 4R + 4r = 68, \end{cases}$ $R = 10$, $r = 7$.

Atsakymas. 10 m, 7 m.



333. $\begin{cases} x + y = 70, \\ 20x + 50y = 2300, \end{cases}$ $x = 40$, $y = 30$.

Atsakymas. 40 monetų po 20 ct ir 30 monetų po 50 ct.

334. Sakykime, kad juvelyras sumaišė x gramų 30% ir y gramų 50% vario lydinius. Kadangi jam reikėjo 200 g lydinio, tai $x + y = 200$. Grynojo vario 30% lydinyje yra $0,3x$ gramų, o 50% lydinyje — $0,5y$ gramų. Gautame 200 g lydinyje grynojo vario yra $0,45 \cdot 200 = 90$ gramų.

$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0,3x + 0,5y = 90, \end{cases}$ $x = 50$, $y = 150$.

Atsakymas. Sumaišyti reikia 50 g 30% ir 150 g 50% vario lydinius.

335. Sakykime, kad dabar Arnui yra x metų, o Donatui — y. Tada $\begin{cases} x - y = 10, \\ x - 12 = 3(y - 12), \end{cases}$

$x = 27$, $y = 17$.

Atsakymas. Arnui yra 27 metai, Donatui — 17 metų.

336. Sakykime, kad savasis lėktuvo greitis yra x km/h, o vėjo greitis — y km/h. Tada

$\begin{cases} 3(x + y) = 960, \\ 4(x - y) = 960, \end{cases}$ $x = 280$, $y = 40$.

Atsakymas. Savasis lėktuvo greitis yra 280 km/h, o vėjo greitis — 40 km/h.

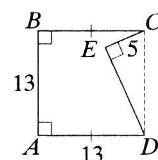
337. Tegul dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmuo yra x, o vienetų skaitmuo — y.
Tada $\begin{cases} x + y = 12, \\ 6y = 10x + y, \end{cases}$ $x = 4$, $y = 8$.
Atsakymas. 48.

338. $a_1 = 2$, $d = 3$.
a) $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$;
b) 44;
c) 68;
d) 101.
Pastaba. Aritmetinė progresija nėra privaloma tema, todėl šio uždavinio galima ir nespręsti.

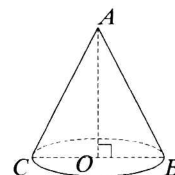
Žinoma, nereikia laikyti klaida, jei mokiniai ras aritmetinės progresijos narius ne taikydami n-tojo nario formulę, o paprasčiausiai surašydami jos narius.

339. Funkcijos $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos į viršų. Viršūnės koordinatės $(0; -8)$; simetrijos ašis — y ašis; parabolė x ašį kerta taškuose $(-4; 0)$ ir $(4; 0)$.
a) $x \in (-4; 4)$; b) $x \in (-\infty; -4)$ ir $(4; +\infty)$;
c) $x \in (0; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; 0)$.

340. Nubrėžiame CD. $ABCD$ — kvadratas, tai $CD = 13$; $\triangle CED$ — status, todėl $ED = 12$. Tuomet $P_{ABCED} = 13 \cdot 3 + 5 + 12 = 56$ (ilg. v.); $S_{ABCED} = 13 \cdot 13 - \frac{5 \cdot 12}{2} = 139$ (kv. v.).



341. Nusibraižykite iliustracinį brėžinį: $AB = 4\,\text{dm}$, $BC = 4{,}8\,\text{dm}$.
a) Apskaičiuojame $BO = 2{,}4\,\text{dm}$ ir $AO = \sqrt{4^2 - 2{,}4^2} = 3{,}2\,(\text{dm})$.
b) *Pastaba.* Akylesni mokiniai turėtų pastebėti, kad vadovėlyje skliausteliuose neteisingai parašyta „*lygiakraščio* trikampio", nes trikampis ABC yra *lygiašonis*.
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 4{,}8 \cdot 3{,}2 = 7{,}68\,(\text{dm}^2)$.



342. Sakykime, kad pirmoje mokykloje yra x pirmūnų.
Tada $x + (x - 38) + (x - 26) = 386$; $x = 150$.
Atsakymas. Pirmoje — 150, antroje — 112, trečioje — 124 pirmūnai.

343. Teisingas atsakymas **D**. Nesunku suvokti, kad **A** ir **B** atsakymai neteisingi. Atsakymas **C** taip pat neteisingas: čia galimi variantai *bbss* arba *bbsb*, bet jie nevisiškai tenkina uždavinio sąlygą. Jei šeimoje 5 vaikai, reikalingos sąlygos įvykdomos, pvz., *bbssb*.

3.4. Sudėties būdas

Skyrelyje mokoma tiesinių lygčių sistemas spręsti sudėties būdu. Jo esmė – vieno nežinomojo pašalinimas sudedant lygtis. Kartais žymiai patogiau yra *atimti* vieną lygtį iš kitos. Tuo atveju, vieną iš lygčių dauginame iš neigiamo skaičiaus, o tada lygtis *sudedame*.
Pagrindinėje mokykloje nebus sprendžiamos lygčių sistemos, kurioms išspręsti *būtinai* reikės taikyti sudėties būdą (visas pagrindinėje mokykloje pateiktas lygčių sistemas galima išspręsti keitimo būdu). Vėlesnėse klasėse šio būdo taikymas gali palengvinti kai kurių lygčių sistemų sprendimą.
Kai mokiniai išmoksta lygčių sistemas spręsti keitimo ir sudėties būdais, pratinkite juos prieš pradedant spręsti sistemą pasirinkti tam atvejui patogesnį būdą, prašykite argumentuoti, *kodėl* vienaip ar kitaip sprendė sistemą. Svarbiausia šiame *skyriuje* pasiekti, kad *visi* mokiniai mokėtų išspręsti dviejų tiesinių lygčių sistemą kuriuo nors – keitimo ar sudėties – būdu. Mokslo metų gale visi mokiniai turėtų mokėti spręsti tokius uždavinius, kaip šio skyrelio teorinėje dalyje pateiktas 1 uždavinys (111 p.).

Pakartoti raidinių reiškinių panašiųjų narių sutraukimą.

Išmokti:

spręsti lygčių sistemas sudėties būdu;
spręsti tekstinius uždavinius sudarant lygčių sistemas;
pasirinkti lygčių sistemų sprendimui tinkamiausią būdą (mokiniai gali naudoti tą sprendimo būdą, kurį moka geriausiai).

Šiame skyrelyje:

1. Pateiktam tekstiniam uždaviniui išspręsti sudaroma lygčių sistema, kur abiejų lygčių koeficientai prie y yra vienas kitam priešingi skaičiai (2 ir -2). Tokiais atvejais patogu taikyti sudėties būdą (galima, žinoma, ir keitimo).

   Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad prieš rašant atsakymą *reikia* patikrinti, ar gautas lygčių sistemos sprendinys tenkina uždavinio sąlygą.

2. Sprendžiant 2 uždavinį parodoma, kad kartais sprendžiant sudėties būdu vieną iš lygčių reikia padauginti iš tokio skaičiaus, kad koeficientai prie vieno nežinomojo būtų vienas kitam priešingi skaičiai.

   Nurodymas. Atvejis, kai iš atitinkamų skaičių dauginamos abi sistemos lygtys, aptariamas sprendžiant 345 uždavinį.

3. Pateikiamas lygčių sistemų sprendimo sudėties būdu algoritmas.

4. Į teorinės dalies pabaigoje pateiktą klausimą turėtų bandyti atsakyti tik stipresnieji mokiniai. Sistemos, neturinčios sprendinių arba jų turinčios be galo daug, nagrinėjamos tik su stipresniais mokiniais (3.5 skyrelyje) ir nėra privalomos.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

344–366 uždaviniai yra teminiai; 367–371 – kartojimo uždaviniai.
Pastaba. Šiame skyrelyje pateikta nemažai tekstinių uždavinių. Kai kuriuos iš jų galima spręsti sudarant lygtį su vienu nežinomuoju. Tą patį galima buvo pasakyti ir apie 3 skyrelio tekstinius uždavinius. Nereiktų versti mokinių, kurie gali išspręsti šiuos uždavinius kitaip, sudarinėti lygčių sistemas. Žinoma, kai kurių uždavinių neišspręsime (ar išspręstume daug sunkiau) nesudarę lygčių sistemų. Mūsų tikslas turėtų būti išmokyti vaikus analizuoti sąlygą, sudaryti uždavinio sprendimo modelį. Galima aptarti atskirų sprendimo būdų privalumus ar trūkumus. 28–60

344. *Nurodymas.* a), b) punktuose lygtis reikia sudėti iš karto; c) ir d) – vieną lygtį padauginti iš (-1); e), f), g) ir h) – vieną lygtį padauginti iš atitinkamo skaičiaus, kad būtų patogu taikyti sudėties būdą.
Patarkite mokiniams, kad gautą vieno nežinomojo reikšmę patogiau įstatyti į paprastesnę lygtį, t. y. su mažesniais koeficientais.
Atsakymas. a) (3; 2); b) $(-8; -4)$; c) $(3{,}5; -1)$; d) $\left(-\frac{1}{2}; -3\frac{11}{16}\right)$; e) $(-0{,}6; -2)$; f) $(3; -1)$; g) $(-1; -2)$; h) $(-4; 6)$; i) $(-2; 3)$.

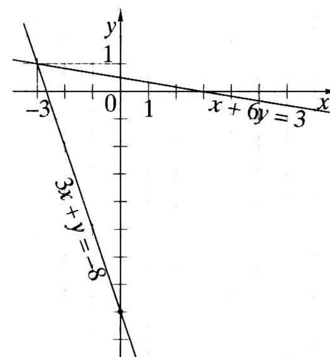
345. (2; 1); b) $(-5; -6)$; c) $(3; -1)$; d) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; e) $(-4; 3)$; f) $(-10; 5)$.

346. a) *Nurodymas.* Tuo galima įsitikinti įstačius duotas x ir y reikšmes į abi duotąsias lygtis ir patikrinus, ar abi lygybės yra teisingos. Kadangi abi lygybės su duotomis reikšmėmis yra teisingos, tai taškas $(-3; -2{,}5)$ priklauso abiem tiesėms. Bet to neužtenka norint tvirtinti, kad tiesės *susikerta* tame taške. Reikia įsitikinti, kad tos tiesės daugiau bendrų taškų neturi, t. y. nesutampa. Tuo tikslu galima paimti bet kurį kitą tašką, priklausantį vienai iš tiesių, ir patikrinti, ar jis nepriklauso ir kitai tiesei (ar netenkina tiesės lygties). Aišku, galima paprasčiausiai išspręsti lygčių sistemą $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$ ir įsitikinti, kad jos sprendinys yra $(-3; -2{,}5)$.
b) $(-4; -2)$.

347. Šio pratimo uždaviniai nuo prieš tai buvusių skiriasi tuo, kad beveik visi koeficientai yra trupmeniniai skaičiai. Abi lygties puses daugindami iš bendrojo trupmenų vardiklio galime pakeisti lygtį jai ekvivalenčia lygtimi su sveikaisiais koeficientais. Tai gerokai palengvins skaičiavimus.

Atsakymas. a) (2; 6); b) (15; 4); c) (500; 1000); d) (6; 5); e) $\left(3\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$; f) (200; 700).

348. Tai lygčių sistemų sprendimo mokymą apibendrinantis uždavinys: sistemą reikia išspręsti grafiniu būdu, po to — vienu iš algebrinių (sudėties arba keitimo). Aišku, galite liepti mokiniams išspręsti sistemą ir visais trim būdais.
Atsakymas. $(-3; 1)$.



349. Tam, kad tiesė eitų per nurodytus taškus, tų taškų koordinatės turi tenkinti tiesės lygtį $y = kx + b$.

a) Kad tiesė eitų per tašką $A(1; 2)$, turi būti teisinga lygybė: $2 = k \cdot 1 + b$. Kad tiesė eitų per tašką $B(-2; 3)$, turi būti teisinga lygybė: $3 = k \cdot (-2) + b$. Kadangi tiesė turi eiti per abu šiuos taškus, tai reikia rasti tokias k ir b reikšmes, su kuriomis *abi* lygtys virstų teisingomis lygybėmis. Tas reikšmes rasime išsprendę sistemą: $\begin{cases} k + b = 2, \\ -2k + b = 3, \end{cases}$ $k = -\frac{1}{3}$, $b = 2\frac{1}{3}$.

Atsakymas. a) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$; b) $y = 0{,}6x + 1{,}6$.

350. a) Ieškomo taško abscisę pažymėkime a. Tada ir to taško ordinatė lygi a. Kadangi taškas $(a; a)$ priklauso tiesei $3x - 5y = 72$, tai jis turi tenkinti tos tiesės lygtį, t. y. $3a - 5a = 72$, $a = -36$.

b) Ieškomo taško koordinatės $(a; -a)$ (arba $(-a; a)$). Tuomet $3a - 5 \cdot (-a) = 72$, $a = 9$; $(9; -9)$ (arba $-3a - 5a = 72$, $a = -9$; $(9; -9)$).

c) Ieškomo taško koordinatės $(a; 2a)$. Tuomet $3a - 5 \cdot 2a = 72$, $a = -10\frac{2}{7}$; $2a = -20\frac{4}{7}$.

Patarkite mokiniams nusibraižyti brėžinį.

Atsakymas. a) $(-36; -36)$; b) $(9; -9)$; c) $\left(-10\frac{2}{7}; -20\frac{4}{7}\right)$.

351. Pieštukas kainavo 0,7 Lt, sąsiuvinis — 1,4 Lt.

352. Vienas rinkinys akvarelinių dažų kainavo 6 Lt, o guašo — 8 Lt.

353. Sakykime, kad maksimalus katerio greitis ežere yra x km/h, o upės tėkmės greitis — y km/h. Tada $\begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 22. \end{cases}$
Atsakymas. Maksimalus katerio greitis ežere 26 km/h.

Šį uždavinį galima spręsti ir nesudarant sistemos, o tiesiog randant duotų greičių aritmetinį vidurkį: $\frac{30+22}{2} = 26$.

354. Pėsčiojo greitis yra 4 km/h, dviratininko — 10 km/h.

355. Pirkėja davė 6 monetas po 2 Lt ir 5 monetas po 5 Lt.

356. 48 ir 8.

357. Viena bandelė kainuoja 0,8 Lt, o viena stiklinė gėrimo — 0,4 Lt.

358. 72 km/h ir 62 km/h.

359. 18 km/h ir 2 km/h.

360. 66 ir 44.

361. Pietūs kainuoja 30 litų, o nakvynė — 60 litų.

362. 42 ir 35.

363. Sakykime, kad keltas plukdė x lengvesnių ir y sunkesnių automobilių. Tada $\begin{cases} x + y = 19, \\ 1{,}3x + 2{,}2y = 31. \end{cases}$
Atsakymas. 12.
Pastaba. Mokiniai gali suklysti rašydami atsakymą, t. y. atsakyme parašydami abiejų nežinomųjų reikšmes. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad šiame uždavinyje (skirtingai negu iki šiol spręstuose) reikia rasti tik vieno nežinomojo reikšmę. Ir vėl: prieš rašant atsakymą reikia dar kartą perskaityti sąlygą.

364. $\begin{cases} 6x = y + 4 + x, \\ 5y = 8 + 8 + x, \end{cases}$ $y = 3{,}5$, $x = 1{,}5$.
$P = 2(6x + 5y) = 2 \cdot (6 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 3{,}5) = 53$.
Atsakymas. 53.

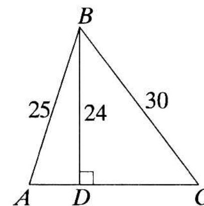
Knygoje pateiktas ne visai tikslus brėžinys, bet mokiniams tai neturėtų sudaryti papildomų sunkumų.

365. Dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmenį pažymėkime x, o vienetų — y.
$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 10y + x + 9 = 10x + y. \end{cases}$$
Atsakymas. 87.

366. 108° ir 72°.

367. a) $1\frac{5}{6}$; b) 15.

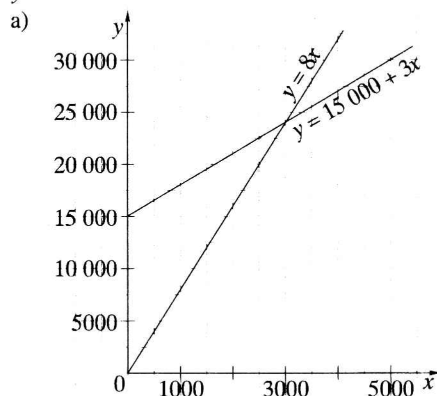
368. a) 2, 5, 8, 11, 14; b) 10, 8, 6, 4, 2.
Pastaba. Ši tema neprivaloma, todėl uždavinio galima nespręsti.



369. a) $AD = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7\,(\text{cm})$, $DC = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18\,(\text{cm})$;
b) $AC = 25\,\text{cm}$;
c) $P_{\triangle ABC} = 25 + 30 + 25 = 80\,(\text{cm})$, $S_{\triangle ABC} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300\,(\text{cm}^2)$;
d) $S_{\triangle ABC} = \frac{30 \cdot h_1}{2}$ (čia h_1 — aukštinė, nubrėžta į kraštinę BC). $\frac{30 \cdot h_1}{2} = 300$, $h_1 = 20\,\text{cm}$. Kadangi $AB = AC$, tai aukštinė, nubrėžta į kraštinę AB, lygi aukštinei BD, t. y. 24 cm.

370. *Nurodymas.* Būtina gerai išnagrinėti ir suprasti sąlygą. Paklauskite mokinių, ką formulėse reiškia x, ką — y, kas atidėta x ašyje, o kas — y. Išsiaiškinkite formulių $y = 15\,000 + x$ ir $y = 3x$ prasmę, tiesių tarpusavio padėties prasmę. Ir tik tada liepkite mokiniams atsakyti į klausimus.
a) 7500. *Pastaba.* Jei būtų klausiama, kiek mažiausiai reikia parduoti muilo gabalėlių, kad gamyba *pradėtų duoti pelno* (žr. 371b), tai atsakymas būtų 7501.
b) Išlaidos: $y = 15\,000 + x = 15\,000 + 8000 = 23\,000$.
Įplaukos: $y = 3x = 3 \cdot 8000 = 24\,000$.
Pelnas: $24\,000 - 23\,000 = 1000$ litų.

371. Visas įmonės išlaidas galima užrašyti formule $y = 15\,000 + 3x$, o įplaukas — $y = 8x$.
a)



b) 3001. *Nurodymas.* Iš grafiko to gali ir nepavykti nustatyti, todėl reikia, kad mokiniai algebriškai išspręstų šį uždavinį, t. y. rastų tą x reikšmę, su kuria įplaukos pasidaro lygios išlaidoms. Vadinasi, reikia išspręsti lygtį $8x = 15\,000 + 3x$. Gauta x reikšmė parodo, kad pardavusi daugiau kaip 3000 gaminių įmonė gaus pelno. Atkreipkite dėmesį, kad 370a punkte buvo klausiama, kiek mažiausiai reikia parduoti, kad gamyba *nebūtų nuostolinga.*
c) Tegul minimali pardavimo kaina yra a Lt. Tada
$15\,000 + 3 \cdot 2500 = a \cdot 2500$, $a = 9$.

3.5. Kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių sistema?

Šis skyrelis yra neprivalomas. Lig šiol buvo nagrinėtos lygčių sistemos, kurios turi tik vieną sprendinį. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog dviejų tiesinių lygčių sistemos sprendiniai yra tų tiesių bendrų taškų koordinatės, todėl:

- sistema gali turėti vieną sprendinį (kai tiesės kertasi viename taške);
- neturėti sprendinių (kai tiesės lygiagrečios);
- turėti be galo daug sprendinių (kai tiesės sutampa).

Taip pat svarbu, kad mokiniai mokėtų iš tiesių analizinės išraiškos nustatyti, kokia tų tiesių tarpusavio padėtis.

Pakartoti:
dviejų tiesių tarpusavio padėtį plokštumoje;
tiesės $y = kx + b$ koeficientų k ir b prasmę.

Išmokti nustatyti, kiek sprendinių turi tiesinių lygčių sistema (ir paaiškinti, *kodėl*).

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjamas pavyzdys, kai lygčių sistema turi vieną sprendinį. Padaroma išvada — lygčių sistema $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ turi vienintelį sprendinį, kai $k_1 \neq k_2$.
2. Nagrinėjant kitą pavyzdį formuluojama išvada, kad lygčių sistema $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ neturi sprendinių, kai $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$.
3. Trečiuoju pavyzdžiu parodoma, kad lygčių sistema $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ turi be galo daug sprendinių, kai $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$. Parodoma, kaip galima užrašyti visus tos sistemos sprendinius.
4. Pateikiama lentelė, kurioje apibendrinama skyrelio medžiaga.
   Nurodymas. Reikėtų su mokiniais aptarti lygčių sistemos
   $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$
   sprendimo eigą ir išspręsti keletą pavyzdžių.

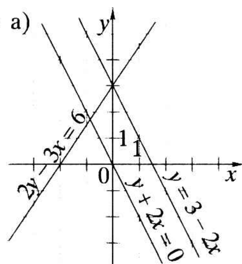
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 372–381 uždaviniai, o 382–386 — kartojimui.
Pastaba. Žinoma, čia pateikiami pratimai ir uždaviniai taip pat yra neprivalomi.

61–71
Spręsti žodžiu.

372. a) Vienas sprendinys; b) nėra sprendinių; c) vienas sprendinys.

373. a)

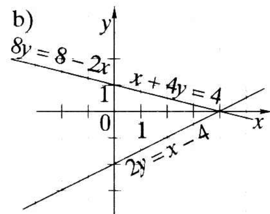


$\begin{cases} y + 2x = 0, \\ 2y - 3x = 6 \end{cases}$ vienas sprendinys;

$\begin{cases} y + 2x = 0, \\ y = 3 - 2x \end{cases}$ sprendinių nėra;

$\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ y = 3 - 2x \end{cases}$ vienas sprendinys.

b)

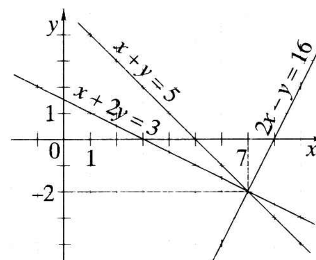


$\begin{cases} x + 4y = 4, \\ 2y = x - 4 \end{cases}$ vienas sprendinys;

$\begin{cases} 8y = 8 - 2x, \\ 2y = x - 4 \end{cases}$ vienas sprendinys;

$\begin{cases} x + 4y = 4, \\ 8y = 8 - 2x \end{cases}$ be galo daug sprendinių.

374. Šį uždavinį galima spręsti įvairiai. Nepatartume tokių uždavinių spręsti braižant tiesių grafikus, nors šiuo atveju visos trys tiesės kertasi „gražiame“ taške, kurio koordinates nesunku nustatyti iš akies. Bet grafinis sprendimo būdas dar neįrodo, kad tikrai tos trys tiesės susikerta taške (7; −2). Šiuo atveju reikėtų patikrinti, ar taškas (7; −2) tikrai priklauso visoms duotosioms tiesėms, t. y. ar jo koordinatės tenkina tų tiesių lygtis.
Patartume pirmiausia rasti dviejų bet kurių tiesių susikirtimo taško koordinates (sprendžiant lygčių sistemą) ir patikrinti, ar tos koordinatės tenkina trečiosios tiesės lygtį.



375. a) (1; −3); b) sistema sprendinių neturi.

376. a) $\begin{cases} 3y + 2x = 12, \\ 6x + 9y = -9, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 4, \\ y = -\frac{2}{3}x - 1. \end{cases}$

Kadangi $k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$, o $b_1 \neq b_2$, tai sprendinių nėra.

b) $\begin{cases} 3x = 4y - 8, \\ 6x - 8y + 16 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 2, \\ y = \frac{3}{4}x + 2. \end{cases}$

Kadangi $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, tai sistema turi be galo daug sprendinių: $\left(t;\ \frac{3}{4}t + 2\right)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 24, \\ 10x - 16y = -34, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 8, \\ y = \frac{5}{8}x + \frac{17}{8}. \end{cases}$

Kadangi $k_1 \neq k_2$, tai sistema turi vieną sprendinį.

d) Sprendinių nėra; e) be galo daug sprendinių; f) sprendinių nėra.

377. a) Jei tiesės susikerta taške, priklausančiame y ašiai, tai to taško koordinatės yra $(0;\ y)$ ir, be to, jos turi tenkinti abiejų tiesių lygtis, t. y.:

$5x - 2y = 3,\quad 5 \cdot 0 - 2y = 3,\quad y = -1{,}5;$

$x + y = a,\quad 0 + y = a,\quad a = y = -1{,}5.$

b) Jei tiesės susikerta taške, priklausančiame x ašiai, tai to taško koordinatės yra $(x;\ 0)$ ir jos turi tenkinti abiejų tiesių lygtis, t. y.:

$5x - 2y = 3,\quad 5x - 2 \cdot 0 = 3,\quad x = \frac{3}{5};$

$x + y = a,\quad \frac{3}{5} + 0 = a,\quad a = \frac{3}{5}.$

Atsakymas. a) $-1{,}5$; b) $\frac{3}{5}$.

378. Lygtys gali būti įvairios. Kad lengviau būtų parinkti reikiamas lygtis, galima pirmiausia lygtį $6x + 3y = 1$ pasirašyti pavidalu $y = kx + b$, t. y. $y = -2x + \frac{1}{3}$. Pateikiame po vieną reikiamų lygčių pavyzdį:

a) $3x - y = -2$; b) $4x + 2y = \frac{2}{3}$; c) $2x + y = 3$; d) $2x + y = \frac{1}{3}$.

379. $\begin{cases} x + y = 3, \\ y - kx = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x + 3, \\ y = kx + 4. \end{cases}$

a) Bet kuri k reikšmė išskyrus -1, t. y. $k \neq -1$; b) $k = -1$.

Galite paklausti mokinių, ar yra tokia k reikšmė, su kuria sistema turi be galo daug sprendinių.

380. a) b)

Braižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką bus mokoma 10-oje klasėje.

Atsakymas. a) $(6;\ 6)$; b) $(0;\ 0)$.

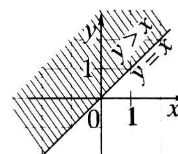
381. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1, \\ 4x + 3y = c, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ 4x + 3y = c, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 4, \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{c}{3}. \end{cases}$

Atsakymas. a) $c \neq 12$; b) $c = 12$.

Galite paklausti mokinių, ar yra tokia c reikšmė, su kuria sistema turi vienintelį sprendinį.

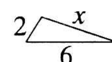
382. Taškai, kurių abscisės lygios ordinatėms, yra tiesėje $y = x$.

383. Reikia pažymėti koordinačių plokštumos sritį, kurioje $y > x$. Tai bus pusplokštumė virš tiesės $y = x$.



384. a) $2\frac{3}{8}$; b) $375{,}3$.

385. Trečiosios kraštinės ilgį pažymėkime x. Kadangi dviejų trikampio kraštinių ilgių suma turi būti didesnė už trečiosios kraštinės ilgį, tai turi būti teisinga nelygybių sistema: $\begin{cases} x < 2 + 6, & (1) \\ 2 < x + 6, & (2) \\ 6 < x + 2. & (3) \end{cases}$



Akivaizdu, kad (2) nelygybė visada teisinga. Iš (1) gauname, kad trečiosios kraštinės ilgis x turi būti mažesnis už 8, o iš (3) — didesnis už 4.

Atsakymas. Arba 5 cm, arba 6 cm, arba 7 cm.

Pravartu įsiminti tai, jog trikampio bet kurios kraštinės ilgis didesnis už kitų dviejų kraštinių ilgių skirtumą, bet mažesnis už jų ilgių sumą.

386. 2 litruose 25% acto grynojo acto yra $2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$ (ℓ).

a) 5 litruose 10% acto marinate grynojo acto turi būti $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$ (ℓ). Kaip tik jo tiek ir yra. Todėl į turimą actą reikia įpilti 3 ℓ vandens.

b) 3 litruose 20% acto marinate grynojo acto turi būti $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ (ℓ). O jo tiek iš viso neturima. Negalima pasigaminti norimo marinato.

Atsakymas. a) Taip; b) ne.

3.6. Lygčių ekvivalentumas. Lygčių sistemų ekvivalentumas

Šis skyrelis taip pat yra neprivalomas. Jame glaustai aptariamas lygčių ekvivalentumas ir lygčių sistemų ekvivalentumas. Ligi šiol mokant lygčių ir lygčių sistemų sprendimo nebuvo aiškinama, kad atlikdami pertvarkymus, mes stengiamės lygtį ar lygčių sistemą pakeisti paprastesne arba dėl kai kurių sumetimų „patogesne“, bet ekvivalenčia pradinei lygtimi ar lygčių sistema. Svarbiausia šiame skyrelyje, kad mokiniai suvoktų, kokios lygtys (lygčių sistemos) vadinamos ekvivalenčiomis ir kokius pertvarkius atlikdami gauname lygtį (lygčių sistemą), ekvivalenčią duotajai.

Pakartoti, kokius pertvarkius galima atlikti sprendžiant lygtis.

Išmokti:

kokios lygtys (lygčių sistemos) vadinamos ekvivalenčiomis;

kokius pertvarkius atlikdami gauname lygtį (lygčių sistemą) ekvivalenčią pradinei.

Šiame skyrelyje:

1. Pateiktas ekvivalenčių lygčių apibrėžimas ir nurodomi ekvivalentūs lygčių pertvarkiai. Jei spręsdami lygtį:
   - prie abiejų lygties pusių pridedame arba iš abiejų pusių atimame tą patį skaičių arba reiškinį (turintį prasmę su bet kuriomis nežinomojo reikšmėmis);
   - abi lygties puses dauginame arba dalijame iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus arba reiškinio (turinčio prasmę su bet kuriomis nežinomojo reikšmėmis),

   tai gauname lygtį, ekvivalenčią duotajai.

   Pastaba. Ankstesniuose vadovėliuose lygties nario perkėlimas į kitą jos pusę, pakeičiant ženklą priešingu, taip pat buvo laikomas ekvivalenčiuoju pertvarkiu.
2. Pavyzdžiais parodoma, kad atlikus kokius nors kitus pertvarkymus, galima prarasti kai kuriuos sprendinius ar gauti pašalinių sprendinių.
3. Pateiktas ekvivalenčių lygčių sistemų apibrėžimas ir nurodomi ekvivalentūs lygčių sistemų pertvarkiai.
4. Pateikti ekvivalenčių lygčių sistemų pavyzdžiai.

   Pastaba. Atsakant į klausimą „Ar ekvivalenčios duotos lygtys (lygčių sistemos)?“ dažnai patogu taikyti ekvivalenčių lygčių (lygčių sistemų) apibrėžimą, t. y. paprasčiausiai išspręsti lygtis (lygčių sistemas) ir pažiūrėti, ar jų sprendiniai sutampa.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 387–390 uždaviniai; 391–394 — kartojimo uždaviniai. 72–74

387. Lygtys **B** ir **C** yra ekvivalenčios, nes jų sprendiniai vienodi.

388. Lygtys **B** ir **C** yra ekvivalenčios.

389. Nėra ekvivalenčios **A** ir **C**; **B** ir **C**.

390. Lygčių sistemos yra ekvivalenčios, nes antrosios sistemos lygtys ekvivalenčios pirmosios sistemos lygtims. Jos gautos pirmąją lygtį padauginus iš 10, o antrąją — iš 6.

Aišku, galima paprasčiausiai išspręsti lygčių sistemas ir pažiūrėti, ar jų sprendiniai sutampa.

391. Galima spręsti dvejopai.

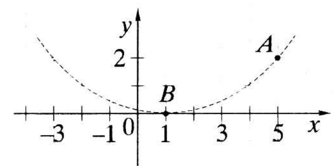
I būdas. Parabolės viršūnė yra taške $B(1; 0)$, todėl: $y = a(x-1)^2$, t. y. $m = -1$. Taškas $A(5; 2)$ priklauso parabolei, todėl: $2 = a(5-1)^2$, $a = \frac{1}{8}$.

II būdas. Kadangi parabolė $y = a(x+m)^2$ eina per taškus $A(5; 2)$ ir $B(1; 0)$, tai tų taškų koordinatės turi tenkinti parabolės lygtį, t. y.: $\begin{cases} 2 = a(5+m)^2, \\ 0 = a(1+m)^2. \end{cases}$

Iš antros sistemos lygties gauname, kad $a = 0$ (netinka) arba $1 + m = 0$, $m = -1$. Įstatę gautą m reikšmę į pirmąją sistemos lygtį randame a reikšmę: $2 = a(5-1)^2$, $a = \frac{1}{8}$.

Atsakymas. $a = \frac{1}{8}$, $m = -1$.

Naudinga pasidaryti brėžinį.



392. a) *I būdas.* $x^2+2x-8 = x^2+4x-2x-8 = x(x+4)-2(x+4) = (x+4)(x-2)$.

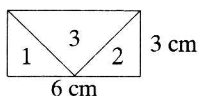
II būdas. $x^2+2x-8 = x^2-2x+4x-8 = x(x-2)+4(x-2) = (x-2)(x+4)$.

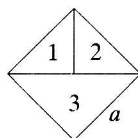
III būdas. Kvadratinį trinarį išskaidysime dauginamaisiais išskirdami dvinario kvadratą: $x^2+2x-8 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-8 = (x+1)^2-9 =$
$= (x+1-3)(x+1+3) = (x-2)(x+4)$.

b) $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$.

393. 1) $1000 - 998 = 2$; 2) $1001 - 999 = 2$.

394.





$a = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ (cm).

4. TRIKAMPIŲ PANAŠUMAS

Tai labai svarbi mokykloje nagrinėjamo geometrijos kurso tema. Figūrų panašumas mokiniams dažnai būna suvokiamas sunkiau negu figūrų lygumas. (Jau pats panašių figūrų apibrėžimas silpnesniems mokiniams dažnai lieka nesuprantamas.)

Šiame skyriuje nagrinėjamas tik *trikampių* panašumas (apibrėžimas, savybės, požymiai). (Daugiakampių panašumas yra neprivalomas visiems mokiniams.) Jau 8 klasėje mokiniai susipažino su figūrų panašumu (Matematika 8, II dalis, 9 skyrius, 3 skyrelis). 8 klasėje nebuvo pateiktas griežtas panašių figūrų apibrėžimas, o buvo siekiama, kad mokiniai panašumą suvoktų kaip didinimą ar mažinimą.

Minimalus lygmuo:

1. Suprasti, kokios dvi atkarpų poros vadinamos proporcingomis.
2. Remtis Talio teoremos *išvada* sprendžiant uždavinius.
3. Suprasti, kokie du trikampiai vadinami panašiais; ką vadiname trikampių panašumo koeficientu.
4. Remtis trikampių panašumu sprendžiant nesudėtingus uždavinius.
5. Gebėti nusakyti trikampių panašumo požymius ir jais remtis sprendžiant paprasčiausius uždavinius.

Pagrindinis lygmuo:

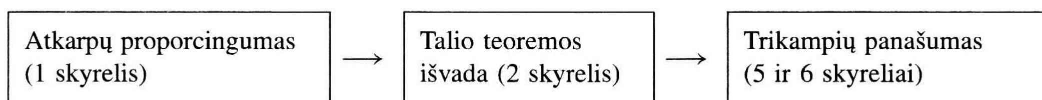
6. Gebėti nusakyti Talio teoremą ir atvirkštinę Talio teoremą ir remtis jomis sprendžiant uždavinius.
7. Remtis trikampio ir trapecijos vidurinės linijos savybėmis sprendžiant uždavinius.
8. Remtis trikampio pusiaukampinės ir pusiaukraštinių savybėmis sprendžiant uždavinius.
9. Žinoti, kam lygus panašių trikampių perimetrų, atitinkamų aukštinių ir plotų santykis ir tuo gebėti remtis sprendžiant uždavinius.
10. Gebėti skriestuvu ir liniuote be padalų atkarpą padalyti į kiek norima lygių dalių.

Aukštesnis lygmuo:

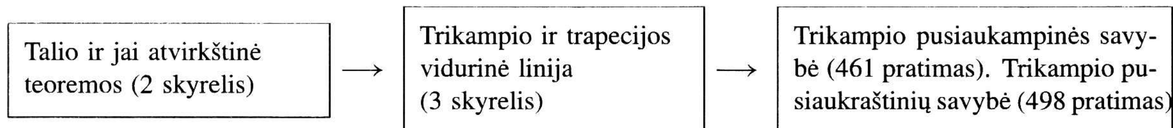
11. Suprasti geometrinio vidurkio sąvoką.
12. Gebėti įrodyti Talio teoremą, jos išvadą ir atvirkštinę Talio teoremą.
13. Gebėti skriestuvu ir liniuote be padalų rasti atkarpos tašką, kuris ją dalytų nurodytu santykiu.
14. Suprasti, ką vadiname aukso pjūviu.
15. Suprasti, kokie daugiakampiai vadinami panašiaisiais, ir remtis jų panašumu sprendžiant uždavinius.
16. Gebėti nubraižyti daugiakampį, panašų į duotąjį, kai žinomas panašumo koeficientas.

Šio skyriaus struktūrą trumpai pavaizduoti galima taip:

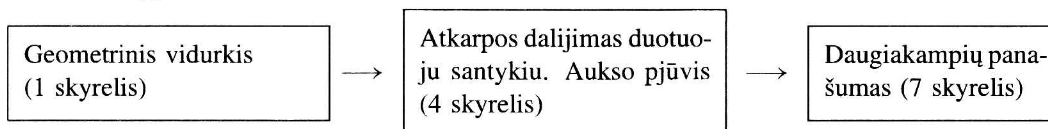
Minimalus lygmuo:



Pagrindinis lygmuo:



Aukštesnis lygmuo:



4.1. Proporcingosios atkarpos

Proporcingumo sąvoka mokiniams yra gerai žinoma. Šiame skyrelyje kalbama apie atkarpų proporcingumą. Realiame gyvenime dažniausiai tai sutinkama braižant žemėlapius, vietovės planus, pastatų išplanavimus ar panašiai. Su šiais klausimais mokiniai yra susipažinę jau anksčiau. Todėl mokant šią temą neturėtų kilti daug sunkumų.

Pakartoti:

kokios dydžių poros vadinamos proporcingomis;
pagrindinę proporcijos savybę;
žemėlapio mastelį.

Išmokti, kokios atkarpų poros vadinamos proporcingomis.

Šiame skyrelyje:

1. Realiu pavyzdžiu kartojama, ką rodo žemėlapio mastelis.

   Pastaba. Būtina, kad tai suprastų visi mokiniai.

2. Pateikiamos dvi poros atkarpų, kurių ilgiai yra proporcingi, ir apibrėžiama, kokias atkarpų poras vadinsime proporcingomis:

   Atkarpos AB ir CD vadinamos proporcingomis atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1, jeigu jų ilgių santykiai yra lygūs, t. y. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

   Nurodymas. Atkreipsime dėmesį, kad atkarpų AB ir CD proporcingumas atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1 užrašomas taip: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Tai padaryta tam, kad būtų lengviau apibrėžti trikampių ir daugiakampių panašumą. Aišku, kad iš parašytos proporcijos išplaukia lygybė $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$. Kai kada atkarpų proporcingumą užrašysime ir pastarąja lygybe. Dviejų atkarpų geometrinis vidurkis apibrėžiamas remiantis keturių atkarpų proporcingumu, kai dvi atkarpos yra lygios.

3. Apibrėžiamas atkarpų proporcingumas, kai jų yra daugiau negu dvi poros.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

395–405 uždaviniai yra teminiai. Visi jie skirti proporcingosioms atkarpoms nagrinėti, išskyrus 401. Šis uždavinys yra neprivalomas visiems moksleiviams ir skirtas atkarpų geometrinio vidurkio sąvokai įtvirtinti. Likę uždaviniai — kartojimo. 1

395. $\frac{AB}{BC} = \frac{9}{7}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$, $\frac{DB}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CD}{AB} = \frac{4}{9}$.

396. a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne.

397. a) 4; b) 4; c) 4.

398. a) 12; b) 12; c) 12.

399. a) 6 cm; b) 5 cm; c) 12 cm; d) 7,5 cm.

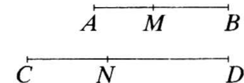
400. a) 1:1 500 000; b) 9 cm; c) 213 km.

401. a) 6 cm; b) 6 cm.

402. a) 42 cm; b) 36 cm.

403. a) 12 cm. *Nurodymas.* $\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$; b) 6 cm.

404. *I būdas.* Kadangi atkarpos AM ir MB proporcingos atkarpoms CN ir ND, tai $\frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND}$ arba $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$. Prie šios lygybės abiejų pusių pridėję po 1, gauname: $1 + \frac{AM}{MB} = 1 + \frac{CN}{ND}$, t. y. $\frac{AM+MB}{MB} = \frac{CN+ND}{ND}$, $\frac{AB}{MB} = \frac{CD}{ND}$. Iš čia: $AB \cdot ND = CD \cdot MB$.



II būdas. Kadangi atkarpos AM ir MB proporcingos atkarpoms CN ir ND, tai $\frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND}$. Iš čia gauname, kad $AM \cdot ND = CN \cdot MB$. Bet $AM = AB - MB$, o $CN = CD - ND$, todėl $(AB - MB) \cdot ND = (CD - ND) \cdot MB$; $AB \cdot ND - MB \cdot ND = CD \cdot MB - ND \cdot MB$, o t. y. $AB \cdot ND = CD \cdot MB$.

405. Žr. 404 uždavinio sprendimą.

406. $4\sqrt{2}$ cm. *Nurodymas.* Įrodykite, kad $\angle EDF = 90°$.

407. a) $\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4}$. *Nurodymas.* Raskite trikampio DEC aukštinę, nubrėžtą iš viršūnės E. Trikampio AEB aukštinė, nubrėžta iš viršūnės E, yra a vienetų ilgesnė už trikampio DEC aukštinę.

b) $\frac{a^2}{4}$. *Nurodymas.* Trikampio ADE plotas lygus kvadrato $ABCD$ ir trikampio DEC plotų sumos ir trikampio AEB ploto skirtumo pusei.

408. $300\,\text{m}^3$.

409. Žinodami trikampio viršūnių koordinates, randame kraštinių ilgius. Pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, įsitikiname, kad trikampis yra status:

a) $AB = \sqrt{(0-(-4))^2 + (7-5)^2} = 2\sqrt{5}$;
$AC = \sqrt{(5-(-4))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{145}$;
$BC = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-7)^2} = 5\sqrt{5}$. $(\sqrt{145})^2 = (2\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{5})^2$.

b) *Nurodymas*. Įsitikinkite, kad: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

410. a) Statusis lygiašonis ($KL = LM = 5$, $\angle KLM = 90°$);
b) lygiašonis ($KL = KM$).

Pastaba. Sprendžiant šį uždavinį pravartu pastebėti, kad taškai K ir L yra tiesėje, lygiagrečioje abscisių ašiai, o taškai L ir M — tiesėje, lygiagrečioje ordinačių ašiai. Vadinasi, kraštinės KL ir LM sudaro statų kampą, o trikampis KLM yra statusis. Kadangi $KL = LM = 5$, tai trikampis KLM — statusis lygiašonis.

411. Šį uždavinį galima išspręsti keliais būdais.

a) *I būdas.* Parašome lygtį tiesės, einančios per du taškus, ir patikriname, ar tiesė eina per trečiąjį tašką. Pavyzdžiui, lygtis tiesės, kuriai priklauso taškai A ir B, yra $y = -2x + 5$, nes $\begin{cases} 5 = k \cdot 0 + b, \\ 1 = k \cdot 2 + b; \end{cases}$ $b = 5$, $k = -2$.

Tiesės $y = -2x + 5$ lygtį tenkina taško C koordinatės, todėl taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

II būdas. Parašome lygtis tiesių, einančių per dvi poras duotų taškų, ir įsitikiname, ar tiesės sutampa. Pavyzdžiui, lygtis tiesės, kuriai priklauso taškai A ir B, yra $y = -2x + 5$. Lygtis tiesės, kuriai priklauso taškai A ir C, yra $y = -2x + 5$, nes $\begin{cases} 5 = k \cdot 0 + b, \\ 7 = k \cdot (-1) + b; \end{cases}$ $b = 5$, $k = -2$.

Vadinasi, tiesės sutampa ir taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

III būdas. Įsitikiname, kad $BA + AC = BC$, kur $BA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Kadangi $BA + AC = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$, o $BC = 3\sqrt{5}$, tai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

Atsakymas. a) yra; b) yra; c) nėra.

412. a) (3; 1); b) (4; 3); c) (2; −2).

413. a) 41; b) 6.

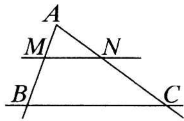
414. a) Per 20 h, per $15\frac{1}{8}$ h; b) $4\frac{7}{8}$ h.

415. a) 1009 m.; b) 1253 m.; c) 1410 m.; d) 1918 m.

416. a) 13; b) 40%; c) $\frac{2}{15}$; d) 48°; e) 300%.

4.2. Talio teorema

Talio teorema, jos išvada ir atvirkštinė Talio teorema yra labai svarbios nagrinėjant trikampių panašumą, jos plačiai taikomos ir sprendžiant uždavinius.
Metodinėje literatūroje Talio teoremos vardu vadinami įvairūs teiginiai. A. Kolmogorovo, A. Pogorelovo, L. Atanasiano bei jų bendraautorių geometrijos vadovėliuose Talio teorema formuluojama taip: „Jei vienoje tiesėje nuosekliai atidėsime keletą lygių atkarpų, per jų galus nubrėšime lygiagrečias tieses, kertančias kitą tiesę, tai jos toje tiesėje iškirs tarpusavyje lygias atkarpas". Lenkiškoje metodinėje literatūroje Talio teorema laikoma šitokia teorema: „Jei dvi lygiagrečios tiesės MN ir BC kerta kampo A kraštines, tai $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$", o prancūziškuose matematikos vadovėliuose — „Jei dvi lygiagrečios tiesės MN ir BC kerta kampo A kraštines, tai $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$".



Tokia pat prancūziškųjų vadovėlių teorema remiamasi ir vokiškuose matematikos vadovėliuose, tik ji nevadinama Talio vardu. (Vokiečiai Talio vardu vadina teoremą apie įbrėžtą į apskritimą kampą, besiremiantį į skersmenį.) Mes nagrinėsime prancūziškąjį Talio teoremos variantą. Juo remiantis lengviau įrodinėti trikampio panašumo požymius.
Prieš formuluojant Talio teoremą, reikėtų išsiaiškinti, kokias atkarpas kampo A kraštinėse atkerta tiesė MN (AM ir AN) bei tiesė BC (AB ir AC). Po to formuluoti Talio teoremą. Jeigu klasėje atsirastų mokinių, kurie paklaustų, kodėl nenagrinėjame atkarpų MB ir NC, tai galima būtų pasakyti, kad teisinga ir šitokia lygybė: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, kurią nesunku gauti iš lygybės $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Iš tikrųjų, paskutiniąją lygybę perrašę taip: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ arba $\frac{AM+MB}{AM} = \frac{AN+NC}{AN}$, gauname: $1 + \frac{MB}{AM} = 1 + \frac{NC}{AN}$, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$, t. y. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Šitokios proporcijos vadovėlyje stengėmės vengti, kad mažiau būtų painiavos nagrinėjant panašiųjų trikampių kraštinių proporcingumą. Vis dėlto proporcija $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ yra taikoma sprendžiant sudėtingesnius uždavinius (žr. „Alfa ir omega", 2001, Nr. 3). Jos *nereikėtų* taikyti sprendžiant šio skyrelio uždavinius.
Nurodymas. Rekomenduojame mokytojams perskaityti docento J. Šinkūno straipsnį „Talio teorema" žurnale „Alfa plius omega", 2001, Nr. 1(11).

Pakartoti:
kas yra teorema ir jai atvirkštinė teorema;
Pitagoro teoremą ir jai atvirkštinę teoremas;
pagrindinę proporcijos savybę.

Išmokti:
Talio teoremą ir jos išvadą;
atvirkštinę Talio teoremą.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiama užduotis, kurią turėtų atlikti visi mokiniai.

   Pastaba. Stipresniems mokiniams galima pasiūlyti atlikti šią užduotį, kai kampo kraštines kerta daugiau negu dvi lygiagrečios tiesės.

2. Formuluojama ir įrodoma Talio teorema.

   Nurodymas. Įrodymą turėtų išsinagrinėti tik patys stipriausieji mokiniai.

3. Formuluojama ir įrodoma Talio teoremos išvada.

   Pastabos. 1) Šią išvadą turi mokėti *visi* mokiniai, nes ji labai svarbi sprendžiant uždavinius.
   2) Prieš formuluodami išvadą silpnesniems mokiniams galite pateikti užduotį, analogišką 1 užduočiai.
   3) Išvados įrodymas yra lengvesnis negu Talio teoremos įrodymas, todėl jį galėtų išsinagrinėti ne tik stipriausieji mokiniai.

4. Pateikiamas ir išsprendžiamas paprastas uždavinys, susijęs su Talio teorema ir jos išvada.

   Pastabos. 1) Šio uždavinio sprendimą turi suprasti *visi* mokiniai.
   2) Galite papildomai nurodyti vienos iš atkarpų MN ar BC ilgį ir paprašyti mokinių apskaičiuoti kitos atkarpos ilgį.

5. Formuluojama ir įrodoma teorema, atvirkštinė Talio teoremai.

   Pastabos. 1) Ši teorema nėra labai svarbi, bet sprendžiant uždavinius kartais ja gali tekti remtis.
   2) Čia reikia siekti, kad mokiniai suprastų, kuo atvirkštinė teorema skiriasi nuo tiesioginės.
   3) Įrodymas yra nesudėtingas ir jį gali suprasti dauguma mokinių. Įrodymas yra vertingas ir tuo, kad remiamės prieštaros metodu (tai mokiniams yra neįprasta).
   4) Čia silpnesniems mokiniams galite liepti įsitikinti teoremos teisingumu ir matuojant. (Bus proga prisiminti tiesių lygiagretumo požymius.)

6. Pateikiamas ir išsprendžiamas paprastas uždavinys, susijęs su atvirkštine Talio teorema.

   Nurodymas. Tai visai lengvas uždavinys. Jis nėra toks svarbus, kaip prieš tai esantis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

417–424 uždaviniai yra teminiai; kartojimui skirti 425–436 uždaviniai. 2–12

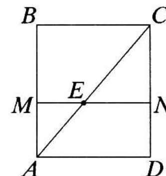
417. a) 18; b) 10; c) $\frac{14}{3}$.

418. a) Taip; b) ne; c) taip.

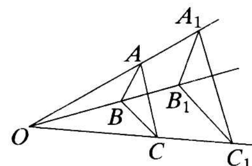
419. a) $x = 5$, $y = 9$; b) $x = 6$, $y = 13{,}5$; c) $x = 12$, $y = \frac{20}{3}$.

420. a) 27; b) 10.
Nurodymas. Apskaičiuokite kraštinių OC ir OD ilgius.

421. *Duota:* $ABCD$ — stačiakampis, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $M \in AB$, $AM = 3{,}2$ cm, $N \in CD$, $DN = 3{,}2$ cm, $E \in AC$, $AE = 4$ cm.
Įrodyti: $ME \parallel BC$, $EN \parallel AD$.
Įrodymas. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (taikome Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui ABC), $\frac{AM}{AB} = \frac{3{,}2}{8} = \frac{2}{5}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Kadangi $\frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC}$, tai pagal atvirkštinę Talio teoremą $ME \parallel BC$. Analogiškai įrodome, kad $EN \parallel AD$. Kadangi $BC \parallel AD$, tai $ME \parallel EN$. Vadinasi, taškai M, E ir N yra vienoje tiesėje.
Pastaba. Šio uždavinio su silpniausiais mokiniais galima nenagrinėti.



422. *Duota:* $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$.
Įrodyti: $AC \parallel A_1C_1$.
Įrodymas. Pagal Talio teoremą kampams A_1OB_1 ir B_1OC_1: $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$, $\frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1}$. Iš čia: $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OC}{OC_1}$. Pagal atvirkštinę Talio teoremą $AC \parallel A_1C_1$.



423. Žr. 422 uždavinio sprendimą.

424. *Nurodymas.* Taikykite Talio teoremos išvadą trikampiams ABD ir MBE bei trikampiams DBC ir EBN.

425. a) $M(4; -2{,}5)$, $N(2; 1)$, $K(1; -3{,}5)$;
b) $P_{MNK} = \left(\frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{\sqrt{85}}{2} + \sqrt{10}\right)$ ilgio vienetų.

426. a) $D(-4; -1)$. *Nurodymas.* Raskite įstrižainės AC vidurio taško O koordinates, o po to — taško D koordinates.
b) $C(-4; 9)$, $D(4; 2)$.

427. a) (0; 0) ir (5; 5); b) (1; −3) ir (2; −4).
Pastaba. Susikirtimo taškų koordinates galima rasti braižant grafikus. Gabesniems moksleiviams galima pasiūlyti išspręsti lygčių sistemą. (Lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos, kai viena lygtis netiesinė, bus nagrinėjamos 10 klasėje.)

428. Tiesėje: a) $x = 5$; b) $y = -4$.
Pastaba. Pageidautina, kad moksleiviai pavaizduotų nurodytus koordinačių plokštumos taškus grafiškai.

429. a) −7 ir 8; b) 10 ir −14.

430. a) $-s^2$; b) $-4b^2$; c) $5\sqrt{5}$; d) $8\sqrt{6}$; e) 100; f) $2x^4 + 12x^2 + 2$.
Nurodymas. $(x \mp 1)^4 = (x^2 \mp 2x + 1)(x^2 \mp 2x + 1)$. Gebesniems mokiniams galima pasiūlyti išvesti formulę $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

431. a) 30 cm, 40 cm; b) 600 cm^2; c) 24 cm; d) 12 cm.

432. a) $x < -4$; b) $x \geqslant 1$.

433. 50°.

434. Per 20 minučių minutinė rodyklė pasisuka 120° kampu, o valandinė 10° kampu. Kampas tarp rodyklių 120° − 60° − 10° = 50°.
Atsakymas. E.

435. a) Aliejaus masė statinėje $\frac{9{,}2\cdot 100}{105-100} = 184$ (kg), o jo tūris — $184 : 0{,}92 = 200$ (ℓ), nes $920\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0{,}92\,\frac{\text{kg}}{\ell}$. Sakykime, kad aliejaus 1 ℓ pradinė kaina buvo x Lt. Sudarome lygtį: $x \cdot 0{,}65 \cdot 200 = 676$; $x = 5{,}2$.
Atsakymas. a) 5,2 Lt; b) 4 Lt.

436. $i = 1$, $p = 2$, $a = 5$, $e = 6$, $s = 0$, $o = 3$. *Nurodymas.* Panašių uždavinių sprendimas paaiškintas knygoje „Matematika 8. Mokytojo knyga“, TEV, Vilnius, 2000.

4.3. Trikampio ir trapecijos vidurinė linija

Šio skyrelio pagrindinis tikslas — apibrėžti trikampio ir trapecijos vidurines linijas, išnagrinėti jų savybes bei jomis remtis sprendžiant uždavinius.
Nurodymas. Trikampio vidurinę liniją ir trapecijos vidurinę liniją siūlome nagrinėti atskirose pamokose.

Pakartoti:
Talio teoremą, jos išvadą, atvirkštinę Talio teoremą;
koks keturkampis yra trapecija ir jos kraštinių pavadinimus;
trikampių lygumo požymius.

Išmokti:
trikampio vidurinės linijos apibrėžimą ir savybes;
trapecijos vidurinės linijos apibrėžimą ir savybes.

Šiame skyrelyje:

1. Apibrėžiama trikampio vidurinė linija.
   Pastaba. Silpnesniems mokiniams galite pasiūlyti nusibraižyti keletą trikampių ir nubrėžti jų vidurines linijas.
2. Pateikiamos ir įrodomos trikampio vidurinės linijos savybės.
   Pastaba. Įrodymas yra nesunkus, todėl jį gali suprasti dauguma mokinių. Silpnesni mokiniai teoremos teisingumu gali įsitikinti ir matuodami.
3. Apibrėžiama trapecijos vidurinė linija.
   Pastaba. Silpnesni mokiniai čia vėl gali pasitreniruoti braižydami trapecijų vidurines linijas. Galite jų paklausti, kiek vidurinių linijų turi trapecija.
4. Pateikiamos ir įrodomos trapecijos vidurinės linijos savybės.
   Pastabos. 1) Trapecijos vidurinės linijos savybės įrodymas yra dirbtinis. Reikėtų mokiniams motyvuoti, kodėl brėžiame pagalbinę tiesę BN. Tikslas — gauti trikampį, kurio vidurinė linija yra MN, ir pasinaudoti jau įrodyta trikampio vidurinės linijos savybe. Šio įrodymo reikalaukite tik iš stipriausių mokinių.
   2) Silpniausi mokiniai savybių teisingumu įsitikinti gali matuodami.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

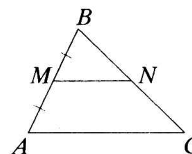
437–447 uždaviniai yra teminiai. Trikampio vidurinei linijai skirti 437–440, trapecijos — 441–447 pratimai.
Nurodymas. Nei vadovėlyje, nei uždavinyne nepateikta uždavinių, kur būtų nurodytos trikampio (trapecijos) viršūnių koordinatės ir reikėtų rasti vidurio linijos galų koordinates ar ilgį. Tokių uždavinių galite patys pateikti mokiniams.
448–455 — kartojimo pratimai. 13–28

437. 3,5 cm.

438. 12 cm.

439. a) $x = 6$, $y = 5$, $z = 4$; b) $x = 5$, $y = 6$, $z = 3$.
Pastaba. Galima papildomai paprašyti mokinių palyginti perimetrą duotojo trikampio su perimetru trikampio, sudaryto iš pradinio trikampio vidurinių linijų, ir padaryti išvadą.

440. *Duota:* $\triangle ABC$, $AM = MB$, $MN \parallel AC$, $N \in BC$.
Įrodyti: MN — $\triangle ABC$ vidurinė linija.
Įrodymas. Kadangi $MN \parallel AC$, tai pagal Talio teoremą $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$. Duota, kad $BM = \frac{1}{2}BA$. Taigi $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$ ir $BN = \frac{1}{2}BC$. Vadinasi, taškas N yra kraštinės BC vidurio taškas, o atkarpa MN — trikampio ABC vidurinė linija.
Nurodymas. Tai svarbus uždavinys. Jį būtinai išnagrinėkite su visais mokiniais.



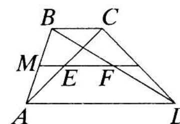
441. a) 9 cm ir 15 cm; b) 8 cm ir 12 cm.

442. 12 cm ir 18 cm.

443. 2,5 cm ir 4,5 cm.

444. *Nurodymas.* Nubrėžkite vieną trapecijos įstrižainę ir remkitės 440 uždaviniu.

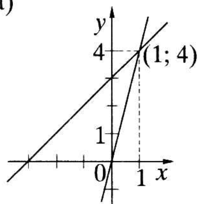
445. *Nurodymas.* Raskite MF ir ME ilgius, o po to ilgį $EF = MF - ME$.

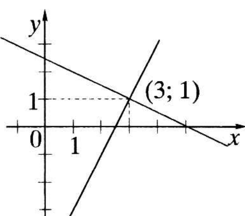


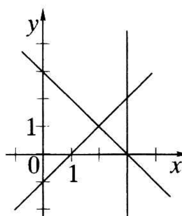
446. 5 cm. *Nurodymas.* Iš viršūnių B ir C nubrėžkite aukštines BE ir CF. Įrodykite, kad $AE = FD = 2$ cm. Raskite AD ilgį, o po to — MN ilgį.

447. 15 cm.

448. c) Keturkampis BCB_1C_1 yra stačiakampis, nes jo įstrižainės yra lygios ir susikirtimo taške dalijasi pusiau. Keturkampis ABA_1C yra rombas, nes jo kraštinės yra lygios, o įstrižainės statmenos.
d) $P_{ABA_1C} = 12$ cm; $P_{BCB_1C_1} = (6 + 6\sqrt{3})$ cm;
$S_{ABA_1C} = 2S_{ABC} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm^2; $S_{BCB_1C_1} = 4S_{ABC} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

449. a) 

b) 

c) 

Atsakymas. a) $x = 1$, $y = 4$; b) $x = 3$, $y = 1$; c) sistema sprendinių neturi.

450. Absoliučioji paklaida: a) 0,036; b) 0,464; c) 0,004.
Santykinė paklaida: a) 0,024, t. y. 2,4%; b) 0,232, t. y. 23,2%; c) $\approx 0{,}0026$, t. y. $\approx 0{,}26\%$.

451. a) $-1\frac{2}{3}$; b) $-\frac{1}{2}$.

452. *Sąlyga.* Per tris dienas vaisių parduotuvė pardavė 720 kg obuolių. Kiek obuolių parduotuvė pardavė pirmą dieną, jei antrą dieną buvo parduota 2 kartus daugiau obuolių negu pirmą, o trečią — 3 kartus daugiau negu pirmą?

Atsakymas. 120 kg.

453. a) 37,5%; b) 62,5%; c) 60%; d) 166,(6)%.

454. **D**.

455. Pavyzdžiui, galima klausti: 1) Ar figūra sudaryta tik iš atkarpų? 2) Ar figūra turi simetrijos ašį? 3) Ar figūra turi simetrijos centrą?

4.4. Atkarpos dalijimas duotu santykiu

Tai nėra labai svarbus skyrelis. Nėra jis ir labai lengvas, kaip gali pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. Tiesa, atkarpą padalyti į kiek norima lygių dalių yra nesunku. Tačiau rasti atkarpoje tašką, kuris jos ilgį padalytų norimu santykiu, jau daugeliui mokinių gali būti per sunkus uždavinys (pvz., 456 pratimas). Šio skyrelio pagrindinis tikslas yra išmokyti mokinius skriestuvu ir liniuote be padalų padalyti atkarpą į kiek norima lygių dalių. Mokiniai gali paklausti, o kam to reikia, — juk visi turime liniuotes su padalomis. Tokiems mokiniams galima pasiūlyti, pavyzdžiui, 5 cm ilgio atkarpą padalyti į 9 lygias dalis.

Vienas pagrindinių šio skyrelio uždavinių yra visus mokinius išmokyti trikampio pusiaukampinės savybės. Šios savybės įrodymas pateiktas 461 uždavinyje smulkiu šriftu. Įrodymas nėra lengvas, ir jo nebūtina reikalauti iš mokinių. Kur kas svarbiau, kad mokiniai mokėtų pačią savybę taikyti spręsdami uždavinius (pvz., 461, 462).

Aukso pjūvis plačiai sutinkamas architektūroje, mene, gamtoje, bet tai nėra labai svarbi sąvoka matematikoje. Todėl ši medžiaga neprivaloma visiems mokiniams, bet daugeliui ji turėtų būti įdomi.

Pakartoti:

paprastosios trupmenos prasmę;
Talio teoremą;
dviejų skaičių geometrinį vidurkį.

Išmokti:

atkarpą padalyti į kiek norima lygių dalių;
atkarpą padalyti į dvi dalis norimu santykiu;
kampo pusiaukampinės savybę.

Šiame skyrelyje:

1. Parodoma ir primenama, kaip atkarpą skriestuvu ir liniuote be padalų galima padalyti į dvi lygias dalis.

   Pastaba. Į klaustuku pažymėtą klausimą nesunkiai turėtų atsakyti visi mokiniai. Papildomai galite paprašyti mokinių atkarpoje AB rasti tašką M, kuris ją dalija santykiu 1 : 3, t. y. $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$. Čia mokiniai turėtų suprasti, kad atkarpą reikia dalyti į 4 lygias dalis. Taip pat galima paprašyti mokinių rasti tašką M, kad $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$.

2. Išsiaiškinus, kaip atkarpą galima padalyti į lygias dalis, kurių skaičius lyginis, mokoma ją padalyti į lygias dalis, kurių skaičius nelyginis.

   Pastaba. Paaiškinti, kad $AB_1 = B_1B_2$, galima taip: pagal Talio teoremą: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{1}{5}$, $AB_1 = \frac{1}{5}AB$; $\frac{AB_2}{AB} = \frac{2}{5}$, $AB_2 = \frac{2}{5}AB$. Vadinasi, $AB_2 = 2AB_1$. Taigi $AB_1 = B_1B_2$. Analogiškai įrodome, kad tarpusavyje lygios ir kitos atkarpos.

3. Pateikiama užduotis, kuri silpnesniems mokiniams gali būti per sunki. (Taškas M sutampa su tašku B_3.) Taip pat galima paprašyti mokinių rasti tašką M, kad $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$.

4. Paaiškinama, kas vadinama aukso pjūviu ir kaip jis randamas.

   Pastabos. 1) Tenka spręsti pilnąją kvadratinę lygtį $x^2 = 1 - x$, kurios išspręsti algebriškai mokiniai dar nemoka (to bus mokoma 5 skyriuje). Negelbės čia ir grafinis sprendimas. Nepamirškite pasiūlyti mokiniams lygtį $x^2 = 1 - x$ išspręsti, kai bus mokoma spręsti kvadratines lygtis algebriškai. (Vadovėlyje 5 teksto eilutėje nuo viršaus vietoj žodžio *nelygybes* turi būti parašyta *lygybes*).

   2) Labai svarbu, kad mokiniai suprastų, ką parodo skaičius $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pasiūlykite mokiniams jį užrašyti apytiksliu dešimtainiu skaičiumi ($\approx 1{,}6$) ir paaiškinkite, kad taškas C atkarpą AB padalijo į dvi dalis taip, kad $\frac{AB}{AC} \approx 1{,}6$, o tai reiškia, kad atkarpa AB yra 1,6 karto ilgesnė už atkarpą AC.

5. Parodoma (ir įrodoma), kaip skriestuvu ir liniuote galima padalyti atkarpą aukso pjūviu.

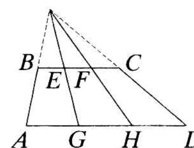
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

456–460 teminiai uždaviniai. 461 ir 462 uždaviniai skirti kampo pusiaukampinės savybei. Kampo pusiaukampinės savybę turėtų žinoti *visi* mokiniai ir mokėti ją taikyti sprendžiant uždavinius. 463–473 — kartojimui skirti uždaviniai.

29, 33, 34, 35

456. *Nurodymas.* a) ir b) punktuose atkarpą AB padalykite į 7 lygias dalis, c) — į 5 lygias dalis, d) — į 4 lygias dalis.

457. Pagrindo AD dalijimas į 3 lygias dalis parodytas brėžinyje. Įrodykite, kad $AG = GH = HD$.



458. a) $x = 2{,}8$ m, $y = 5{,}6$ m; b) $x = 4$ dm, $y = 8$ dm.
Pastaba. Uždavinyje nurodyti šoninių trikampio kraštinių dalių ilgiai uždavinio atsakymui įtakos neturi. Svarbu, kad šoninės trikampio kraštinės padalytos į 3 lygias dalis.

459. a) Pagal brėžinio duomenis negalima nustatyti upės pločio. Mokiniams galima pateikti klausimą: kokį atstumą dar reikėtų išmatuoti, kad galėtume nustatyti upės plotį?
Galimi atsakymų variantai:
1) atstumą BC. Pavyzdžiui, kai $BC = 21$ m, tai pagal Talio teoremos išvadą turime: $\frac{AB}{AB+21} = \frac{25}{40}$. Iš čia $AB = 35$;
2) atstumą ED. Pavyzdžiui, kai $ED = 30$ m, tai pagal Talio teoremos išvadą turime: $\frac{AE}{AE+30} = \frac{25}{40}$. Iš čia $AE = 50$. Iš stačiojo trikampio ABE randame: $AB = \sqrt{50^2 - 25^2} \approx 43$ (m);

3) kampą D. Pavyzdžiui, kai $\angle D = 45°$, turime: $\angle AEB = 45°$ (atitinkamieji kampai, gauti dvi lygiagrečias tieses BE ir CD perkirtus tiese AD). Vadinasi, $\triangle ABE$ — statusis lygiašonis. Todėl $AB = BE = 25$ m. Atstumą AB taip pat galima apskaičiuoti, jeigu $\angle D = 60°$ arba $\angle D = 30°$.
b) 60 m.

460. 1 : 2.

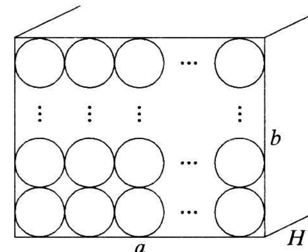
461. 8,1.

462. $AD = \frac{30}{7}$; $DC = \frac{54}{7}$.

461 ir 462 — svarbiausi šio skyriaus uždaviniai. Daugiau uždavinių šiai savybei įtvirtinti galite rasti uždavinyne.

463. $\approx 35{,}1$ m.

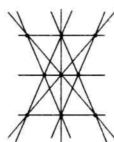
464. a) $V = 28{,}8\,\text{m}^3$; b) $V_1 = 7{,}2\pi\,\text{m}^3 \approx 22{,}6\,\text{m}^3$; c) $\frac{V_1}{V} = \frac{7{,}2\pi}{28{,}8} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.
d) Sakykime, kad krūvos matmenys yra $a \times b \times H$, t. y. rąstų vienos eilės plotis — a metrų, aukštis — b metrų, o ilgis — H metrų. Kadangi vienoje eilėje yra m rąstų, tai vieno rąsto skersmuo bus $\frac{a}{m}$, o spindulys $r = \frac{a}{2m}$. Kadangi yra n eilių, tai rąstų krūvos aukštis $b = n \cdot 2 \cdot \frac{a}{2m} = \frac{na}{m}$. Taigi rąstų krūvos užimamas tūris (stačiakampio gretasienio tūris) yra:
$V = abH = a \cdot \frac{na}{m} \cdot H = \frac{na^2 \cdot H}{m}$, o medienos tūris: $V_1 = \pi\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \cdot H \cdot m \cdot n =$
$= \frac{\pi a^2 H \cdot n}{4m}$. Tuomet $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi a^2 \cdot H \cdot n \cdot m}{4m \cdot n \cdot a^2 \cdot H} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.



465. a) Kadangi vandens kiekis duotas litrais, o $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$, tai patogu baseinėlio spindulį ir gylį išreikšti decimetrais. Turėsime: $R = 2{,}2\,\text{m} = 22\,\text{dm}$, $H = 80\,\text{cm} = 8\,\text{dm}$. Apskaičiuokime baseinėlio tūrį:
$V = \pi \cdot 22^2 \cdot 8 = 3872\pi \approx 12\,158{,}08\,(\text{dm}^3)$. Kadangi per 1 min išbėga $90\,\ell$ vandens, tai pripildyti baseiną, kurio tūris $12\,158{,}08\,\text{dm}^3$, prireiks $\frac{12\,158{,}08}{90} \approx 135$ (min), t. y. 2 h 15 min.
b) 37 Lt 82 ct.

Sąlygoje turi būti ne 3,11 ct, o 3,11 Lt.

466.



467. a) d_1: $y = 2x + 4$; d_2: $y = 2x$; d_3: $y = -3$; d_4: $y = -\frac{1}{2}x - 2$.
b) Kadangi $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$, tai $d_1 \parallel d_2$.
c) $k_1 \cdot k_4 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Vadinasi, $d_1 \perp d_4$.

Pastaba. Sąlygą galima patikslinti taip: priskirkite nubrėžtoms tiesėms jas atitinkančias lygtis.

468. a) $a = 0{,}1$; $c = -7$; b) $a = -1$; $m = 5$.
Nurodymas. Žr. 3 skyriaus 391 uždavinio sprendimą.

469. a) Sakykime, kad vienas sąsiuvinis kainuoja x Lt, o vienas tušinukas — y Lt. Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 12, \\ 5x + 3y = 13{,}5; \end{cases} \quad x = 4{,}5;\ y = -3.$$

Vadinasi, uždavinys sprendinių neturi, kitaip sakant — taip būti negali. Informacija apie sąsiuvinių ir tušinukų kainą neteisinga. Pagal ją apskaičiuoti sąsiuvinio ir tušinuko kainą neįmanoma.
b) 1 kg saldainių kainuoja 12 Lt, o 1 kg sausainių — 10 Lt.

470. C.

471. $63\,700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13$.

472. a) $(m + n)(m - n + 1)$; b) $(2a - b)(a - b)(a + b)$;
c) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; d) $(a - b + c)(a + b - c)$.

473. a) Vienaženklių natūraliųjų skaičių yra 9.
Dviženklių skaičių yra $9 \cdot 10 = 90$. Kiekvieną dviženklį skaičių sudaro du skaitmenys, tad visus dviženklius skaičius sudaro $2 \cdot 90 = 180$ skaitmenų.
Triženklių skaičių yra $100 \cdot 9 = 900$. Kiekvieną triženklį skaičių sudaro 3 skaitmenys, tad visus triženklius skaičius sudaro $900 \cdot 3 = 2700$ skaitmenų.
Keturženklių skaičių yra 1 (1000). Jį sudaro 4 skaitmenys.
Taigi iš viso šį skaičių sudaro $9 + 180 + 2700 + 4 = 2893$ skaitmenys.
b) Skaičius, turintis 2000-ąjį skaitmenį, bus triženklis. Vienaženklius ir dviženklius skaičius užrašysime $9 + 180 = 189$ skaitmenimis. Tada triženkliai skaičiai bus užrašomi $2000 - 189 = 1811$ skaitmenų. Bet $1811 = 3 \cdot 603 + 2$. Vadinasi, ieškomasis skaitmuo yra 604-ojo triženklio skaičiaus antroje vietoje. Toks skaičius yra $9 + 90 + 604 = 703$, o ieškomas skaitmuo yra 0.
Atsakymas. a) 2893; b) 0.

4.5. Trikampių panašumas

Tai labai svarbus skyrelis. Šio skyrelio medžiagą turėtų suprasti *visi* mokiniai. Mokiniams, supratusiems 8 klasėje nagrinėtą skyrelį „Figūrų didinimas ir mažinimas“ bei šio skyriaus pirmuosiuose skyreliuose nagrinėtą atkarpų proporcingumą ir Talio teoremos išvadą, neturėtų būti sunku įsisavinti ir šio skyrelio medžiagą. Labai svarbu, kad mokiniai suvoktų, kokie trikampiai vadinami panašiais, t. y. suvoktų apibrėžimą ir mokėtų jį taikyti spręsdami uždavinius.

Pastaba. Trikampių panašumo apibrėžimas yra perteklinis — visiškai pakaktų, kad kraštinės būtų proporcingos. (Bet to nepakanka n-kampio atveju.)

Pakartoti:

„buitišką“ panašumo supratimą;
atkarpų proporcingumą;
Talio teoremos išvadą;
tiesių lygiagretumo požymius;
kokie trikampiai vadinami lygiais.

Išmokti:

„griežtą“ trikampių panašumo apibrėžimą;
kas yra panašumo koeficientas;
kad tiesė, lygiagreti vienai trikampio kraštinei, atkerta trikampį, panašų į duotąjį;
kam lygus panašių trikampių perimetrų santykis.

Šiame skyrelyje:

1. Primenama, kaip galima gauti panašią figūrą duotajai (ją padidinus ar sumažinus).

   Pastaba. Galima mokinių paklausti, kaip pasikeitė figūroje F_2 nuspalvinto trikampio kraštinių ir kampų didumai palyginus su figūros F_1 nuspalvintu trikampiu.

2. Pateikiamas panašių trikampių apibrėžimas:

   > *Du trikampiai vadinami panašiais, jeigu jų atitinkami kampai lygūs ir vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms.*

   Ir panagrinėjami du panašūs trikampiai.

   Pastabos. 1) Labai svarbu, kad šį apibrėžimą mokiniai mokėtų užrašyti lygybėmis konkretiems trikampiams, kaip tai padaryta vadovėlyje.

   2) Suformuluokite atvirkščią teiginį: jei trikampiai panašūs, tai jų atitinkami kampai lygūs, o atitinkamos kraštinės proporcingos. Ši formuluotė reikalinga todėl, kad mokiniai gana lengvai įrodo, jog trikampiai yra panašūs, bet ką su tuo panašumu daryti toliau — nežino.

   3) Mokiniai turi žinoti, ką vadiname trikampių panašumo koeficientu, ir mokėti jį apskaičiuoti.

   4) Pratinkite mokinius vartoti panašumo ženklą (S raidė paguldyta ant šono).

   5) Stipresnieji mokiniai turi suvokti, kad jei $\triangle_1 \backsim \triangle_2$, o jų panašumo koeficientas yra k, tai $\triangle_2 \backsim \triangle_1$ ir jų panašumo koeficientas yra $\frac{1}{k}$. Galima sakyti, kad lygūs trikampiai yra panašūs, o jų panašumo koeficientas yra 1.

   Kad nebūtų painiavos, kam lygus $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ panašumo koeficientas (k ar $\frac{1}{k}$), sutarta: jei rašome $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, tai panašumo koeficientas $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ($= k$); jei rašome $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, tai panašumo koeficientas $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ ($= \frac{1}{k}$). Aišku, šio reikalavimo laikytis nėra būtina.

3. Įrodoma, kad panašių trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.

   Pastaba. Dauguma mokinių turėtų mokėti įrodyti šį faktą.

4. Įrodoma labai svarbi teorema:

   > *Tiesė, lygiagreti vienai trikampio kraštinei ir kertanti kitas kraštines, atkerta trikampį, panašų į duotąjį.*

   Pastabos. 1) Šios teoremos formuluotę — kas duota ir ką reikia įrodyti — turi mokėti visi mokiniai. Labai svarbu, kad mokiniai suprastų, ką reikia įrodyti, t. y. jie turi suvokti, kad reikia įrodyti, jog trikampių kraštinės proporcingos, o kampai lygūs.

   2) Įrodymas yra nesudėtingas, todėl jį gali išmokti dauguma mokinių.

5. Pateikiamas uždavinys, kurį sprendžiant reikia remtis anksčiau įrodyta teorema.

   Pastaba. Šį uždavinį turėtų suprasti *visi* mokiniai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

474–481 uždaviniai yra teminiai; 482–492 — kartojimo.

30,31,36,52–54,69

474. $AB \approx 2{,}8\,\text{cm}$, $CB = CA \approx 1{,}95\,\text{cm}$, $KM \approx 2{,}1\,\text{cm}$, $LM \approx 1{,}6\,\text{cm}$, $KL \approx$ $\approx 1{,}4\,\text{cm}$. Taigi $\frac{AB}{KM} \approx \frac{2{,}8}{2{,}1} \approx 1{,}33$, $\frac{CB}{KL} \approx \frac{1{,}95}{1{,}4} \approx 1{,}39$, $\frac{CA}{LM} \approx \frac{1{,}95}{1{,}6} \approx 1{,}22$. Kadangi $\frac{AB}{KM} \neq \frac{CB}{KL} \neq \frac{CA}{LM}$, tai trikampiai yra nepanašūs.
Nurodymas. Reikėtų mokiniams pasiūlyti sąsiuviniuose nusibraižyti du stačiuosius trikampius ABC ir KLM, kurių statiniai yra: vieno — 6 cm ir 8 cm, o kito — 3 cm ir 4 cm. Matuojant kampus ir kraštines įsitikinti, kad šie trikampiai yra panašūs. Užrašyti atitinkamų kraštinių proporcijos ir kampų lygybes.

475. Taip. *Nurodymas.* Mokiniai gali pastebėti, kad atskiru atveju jie gali būti ir lygūs.

476. $k_1 \cdot k_2$. *Nurodymas.* Šią savybę mokiniai gali atrasti ir imdami konkrečius trikampius.

477. $BC = 3{,}2$, $AC = 2{,}8$.

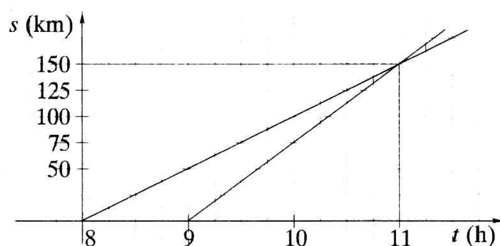
478. $A_1B_1 = 10$, $A_1C_1 = 18$.

479. 2 dm, 4 dm, 5 dm.

480. *Nurodymas.* Apskaičiuokite trikampio $A_1B_1C_1$, panašaus į trikampį ABC, kraštines ($A_1B_1 = 3{,}6$ cm, $B_1C_1 = 6$ cm, $A_1C_1 = 8{,}4$ cm). Skriestuvu ir liniuote nubraižykite šį trikampį.

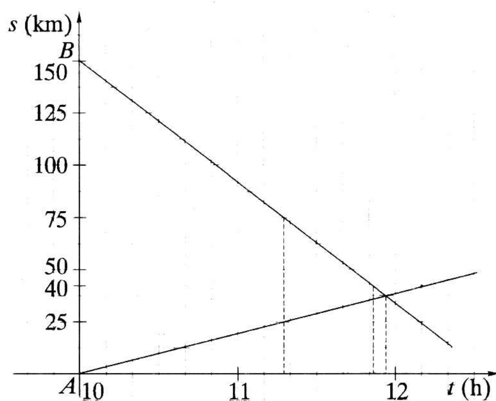
481. $AB = 7{,}5$ cm, $A_1B_1 = 10{,}5$ cm. *Nurodymas.* Silpnesniems mokiniams reikėtų pakomentuoti sąlygą, t. y. paaiškinti, kad iš lygybės $P_{ABC} = \frac{5}{7}P_{A_1B_1C_1}$ išplaukia, kad $\triangle ABC$ kraštinės yra trumpesnės už atitinkamas $\triangle A_1B_1C_1$ kraštines, t. y. $AB = \frac{5}{7}A_1B_1$, $BC = \frac{5}{7}B_1C_1$, $AC = \frac{5}{7}A_1C_1$.
Be to, žinoma, kad vienos poros kraštinių skirtumas lygus 3 cm, t. y. galima sakyti, pavyzdžiui, kad $A_1B_1 - AB = 3$.

482. Sunkvežimio ir autobuso važiavimo grafikai pavaizduoti brėžinyje.



a) Autobusas pavys sunkvežimį 11 val. ir jie bus nuvažiavę 150 km; b) 25 km.

483. Dviratininko ir autobuso važiavimo grafikai pavaizduoti brėžinyje.



a) $\approx$ 11 h 50 min; $\approx$ 37,5 km; b) $\approx$ 50 km; c) $\approx$ 11 h 48 min.

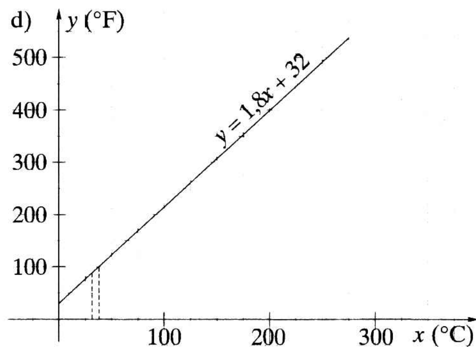
d) Dviratininkas bus 25 km nuo miesto B, nuvažiavęs 125 km. Kadangi jo greitis yra 20 km/h, tai jis kelionėje užtruks $\frac{125}{20} = 6$ h 15 min. Vadinasi, 16 h 15 min jis bus 25 km nuo miesto B. Pavaizduoti tai grafiškai reikėtų gana didelio popieriaus lapo. Galima paklausti, kelintą valandą dviratininkas bus 100 km nuo miesto B. (*Ats.*: tiksliai apskaičiavus — 12 h 30 min.)

484. *Nurodymas.* Pirmiausia reikia išsiaiškinti, kuri linija žymi pėsčiojo ėjimo grafiką, o kuri — dviratininko. (Logiškai mąstant dviratininko greitis turėtų būti didesnis. Kad laužtė žymi dviratininko važiavimo grafiką, aišku ir iš d) punkto klausimo.) Po to reikėtų paprašyti pakomentuoti judėjimo grafikus. (Pėstysis ėjo pastoviu greičiu, o dviratininkas į vietovę A važiavo lėčiau negu grįždamas į B. Taip pat vietovėje A jis užtruko 0,5 val.) Silpnesnių mokinių galima paklausti, koks yra atstumas tarp vietovių A ir B.
a) $\approx$ 7 km; b) $\approx$ 6 km; 36 km; c) 3 h; 4 h; d) $\approx$ 5 km; taip; e) $\approx$ 5 km.

485. a) Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b, \\ 212 = 100a + b; \end{cases}$ $b = 32$, $a = 1{,}8$;

b) ≈ 233°C; c) -40 laipsnių;

d)



e) 32°C; f) taip, nes jo temperatūra virš 40°C.

486. a) 43 a 3 m^2. *Nurodymas.* Jeigu tvenkinio plotas x ha, tai

$$\begin{matrix} 17{,}5\text{ ha} - 97{,}6\%, \\ x\text{ ha} - 2{,}4\%; \end{matrix} \Rightarrow x = 0{,}430327\ldots;$$

1 a = 100 m^2,
1 ha = 10 000 m^2,
1 km^2 = 1 000 000 m^2.

b) 3 ha 46 a 94 m^2. *Nurodymas.* Miško ir pievų plotas 8,5 ha. Jeigu pievų plotas x ha, tai miško plotas $1{,}45x$ ha. Todėl $x + 1{,}45x = 8{,}5$, $x = 3{,}469387\ldots$.

487. a) Apskaičiuokime, kurią palikimo dalį būtų gavęs kiekvienas sūnus pagal pirmąjį testamentą. Sudarome lygtį: $7x + 6x + 5x = 1$, $x = \frac{1}{18}$. Pirmasis sūnus būtų gavęs $\frac{7}{18}$, antrasis — $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, trečiasis — $\frac{5}{18}$ palikimo. Apskaičiuokime, kurią palikimo dalį gavo kiekvienas sūnus pagal antrąjį testamentą. Sudarome lygtį: $6x + 5x + 4x = 1$, $x = \frac{1}{15}$. Pirmasis sūnus būtų gavęs $\frac{6}{15}$, antrasis — $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, trečiasis — $\frac{4}{15}$. Kadangi $\frac{7}{18} < \frac{6}{15}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ir $\frac{5}{18} > \frac{4}{15}$, tai pagal antrąjį testamentą daugiau palikimo gaus pirmasis sūnus, antrasis sūnus gaus tiek pat, kiek būtų gavęs pagal pirmąjį testamentą, o trečiasis sūnus gaus mažiau.

b) Kadangi pagal antrąjį testamentą daugiau palikimo gauna pirmasis sūnus, tai: $\frac{7x}{18} + 1000 = \frac{6x}{15}$, $x = 90\,000$. Taigi paveldima 90 000 Lt. Pirmasis sūnus gauna 36 000 Lt, antrasis — 30 000 Lt, o trečiasis — 24 000 Lt.

488. a) I ir IV; b) IV.

489. a) Be galo daug sprendinių; b) sprendinių nėra.

490.

Dilgėlių maltinukai	%	340 g
Dilgėlės	34	115,6
Varlių šlaunelės	59	200,6
Riebalai	5	17
Petražolės	2	6,8

491. *Nurodymas.* Aritmetinės progresijos pirmasis narys visais atvejais yra skaičius 1. Skaičius 16 punkte a) yra ketvirtas narys, punkte b) — penktas, punkte c) — šeštas, o punkte d) — septintas narys.

a) 6 ir 11; b) 4,75; 8,5 ir 12,25; c) 4; 7; 10; 13; d) 3,5; 6; 8,5; 11; 13,5.

492. Bandymų ir klaidų metodu tikriname sąlygą:
jeigu pyragėlių su mėsa yra 1, tai su kopūstais — 2, o su grybais — 11 (netinka pagal sąlygą),
jeigu pyragėlių su mėsa yra 2, tai su kopūstais — 4, o su grybais — 8 (netinka pagal sąlygą),
jeigu pyragėlių su mėsa yra 3, tai su kopūstais — 6, o su grybais — 5 (tinka pagal sąlygą),
jeigu pyragėlių su mėsa yra 4, tai su kopūstais — 8, o su grybais — 2 (tinka pagal sąlygą).

Atsakymas. **D**.

4.6. Trikampių panašumo požymiai

Šiuo skyreliu baigiamas nagrinėti trikampių panašumas. Žinoti trikampių panašumo požymius turėtų visi mokiniai. (Iš 7 klasės kurso mokiniai turi žinoti trikampių lygumo požymius.) Iš silpniausių mokinių nereikėtų reikalauti žinoti, kam lygus panašių trikampių plotų santykis. O žinoti, kaip susijusios panašių trikampių aukštinės ir atitinkamos kraštinės, galima reikalauti tik iš stipriausių mokinių.

Trikampių panašumo požymiai, kaip ir lygumo požymiai nėra numeruojami. To nerekomenduojame daryti ir mokytojams.

Pakartoti:

trikampių lygumo požymius;
trikampių panašumo apibrėžimą;
Talio teoremą;
Talio teoremos išvadą;
atvirkštinę Talio teoremą.

Išmokti:

formuluoti trikampių panašumo požymius;
kam lygus panašių trikampių plotų santykis;
trikampių pusiaukraštinių savybę (498 uždavinys);
aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės į įžambinę, savybes:
1) dalija trikampį į du panašiuosius trikampius, kurie panašūs į duotąjį trikampį;
2) yra gautų įžambinės atkarpų geometrinis vidurkis (501, 502 uždaviniai).

Šiame skyrelyje:

1. Pagrindžiama, kam reikalingi trikampių panašumo požymiai.
2. Suformuluojami trikampių panašumo požymiai.

   Pastaba. Galite mokinių paprašyti suformuluoti, kas duota ir ką reikia įrodyti, pabrėždami, kokios *lygybės* kiekvienu atveju turi būti teisingos.
3. Įrodomi trikampių panašumo požymiai.

   Nurodymas. Šių įrodymų reikalaukite tik iš stipriausių mokinių.
4. Įrodoma, kad panašių trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

493–499, 501–509 teminiai uždaviniai. Didžiausia jų dalis (493–497, 499, 501–505) skirta trikampių panašumo požymiams nagrinėti. Vienas uždavinys (498) yra trikampio pusiaukraštinių savybei taikyti ir trys uždaviniai (507–509) — panašiųjų trikampių plotų santykio savybei kartu prisimenant ir panašiųjų trikampių perimetrų santykio savybę. Likę uždaviniai — kartojimo. 32,37–51,55–64

493. a) Taip; $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{ML} = \frac{AC}{LN}$; b) ne.

494. $EF = \frac{45}{4}$, $AC = \frac{64}{9}$.

495. Trikampiai panašūs pagal du lygius kampus; $\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{ON} = \frac{AB}{MN}$.

496. a) $\frac{23}{5}$; b) $\frac{20}{9}$; c) $\frac{10}{3}$.

497. a) $x = \frac{8}{3}$, $y = 4$; b) $x = 2$, $y = 6$; c) $x = 2{,}5$, $y = 3{,}2$.

498. a) 2 : 1; b) 1 : 3; c) 1 : 3.
Nurodymas. Įsitikinkite, kad pusiaukraštinės trikampį padalija į 6 lygiapločius trikampius.

Tai labai svarbus uždavinys. Daugiau uždavinių šia tema galite rasti uždavinyne.

499. a) 2,4; b) 12,6; c) $\frac{55}{6}$.

500. a) Ne; b) taip; d) ne.

501. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad visų trijų trikampių atitinkami kampai yra lygūs.

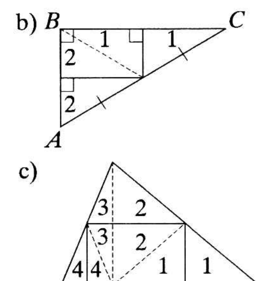
502. *Nurodymas.* Užrašykite atitinkamų kraštinių proporcingumą panašiems trikampiams ADC ir BDC.

503. a) Ne; b) taip.

504. a) 28,6 m; b) ≈ 28,7 m.

505. 600 cm^2.

506. a) $\frac{5}{4}S$. *Nurodymas.* Trikampis, kurio plotas S, yra panašus į didįjį trikampį. Iš trikampių panašumo išplaukia, kad $\frac{S}{S+X} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Iš čia rasite X.
b) $\frac{1}{2}S$. *Nurodymas.* Vienodais skaičiais pažymėtų trikampių plotai yra lygūs.
c) $\frac{1}{2}S$. *Nurodymas.* Vienodais skaičiais pažymėtų trikampių plotai yra lygūs.
d) $\frac{S}{8}$. *Nurodymas.* Trikampis, kurio plotas X, yra panašus į didįjį trikampį. Vadinasi, $\frac{X}{X+S} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Iš šios lygybės raskite X.



507. 4. *Nurodymas.* $\triangle AFD \backsim \triangle CFE$ (trikampių panašumo požymis pagal du kampus), nes $\angle CAD = \angle ACB$ (vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių AD ir BC bei kirstinės AC); $\angle ADE = \angle CED$ (vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių AD ir BC bei kirstinės ED).

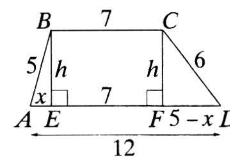
508. a) Ne; b) taip.

509. a) $S_{ABC} = 160$, $S_{KLM} = 250$; b) $P_{ABC} = 144$, $P_{KLM} = 96$;
c) $S_{ABC} = 72$, $S_{KLM} = 32$; d) $P_{ABC} = 255$, $P_{KLM} = 170$.

510. a) $k = 1{,}5$; $l = 3$; b) $k = -\frac{3}{4}$; $l = 3$; c) $k = -2$; $l = 0$.

511. a) $2s$; b) parabolė (jos lygtis $H = 5T^2$).

512. *Duota*: $ABCD$ — trapecija, $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = 6$, $AD = 12$.
Rasti: S_{ABCD}.
Sprendimas. Nubrėžkime iš viršūnių B ir C trapecijos aukštines. Iš stačiojo trikampio ABE: $h^2 = 25 - x^2$. Iš stačiojo trikampio CFD: $h^2 = 36 - (5-x)^2$. Iš šių abiejų lygybių gauname: $25 - x^2 = 36 - (5-x)^2$, $x = 1{,}4$. Taigi $h^2 = 25 - 1{,}4^2 = 23{,}04$, $h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$. Tuomet $S_{ABCD} = \frac{7+12}{2} \cdot 4{,}8 = 45{,}6$.



513. $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

514. 36. *Pastaba.* Nesudėtingus galimybių medžius mokiniai braižė 6 klasėje (žr. „Matematika 6“, 148–150 p.). Plačiau ši tema bus nagrinėjama 8 skyriuje (3 skyrelis), todėl čia yra puiki proga prisiminti galimybių medį.

515. a) $(1; -3)$; b) $(-\sqrt{5}; 1)$; $(\sqrt{5}; 1)$; c) $(2; 4)$; $(-1; 1)$;
d) $(4; 12)$; $(-1; -3)$.

516. Tiesėje $y = x$.

517. a) Duotąją tiesę $2x - y + 1 = 0$ užrašykime taip: $y = 2x + 1$. Šios tiesės krypties koeficientas $k_1 = 2$. Tuomet šiai tiesei lygiagrečios tiesės koeficientas $k_2 = 2$, o jos lygtis yra $y = 2x + b$. Kadangi ši tiesė turi eiti per tašką $(0; 0)$, tai jo koordinatės turi tenkinti tiesės $y = 2x + b$ lygtį, t. y. $0 = 2 \cdot 0 + b$ ir $b = 0$. Taigi tiesės lygtis bus $y = 2x$ (arba $2x - y = 0$);
b) $-3x + y = 0$.

Nurodymas. Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra lygiagrečios, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$.

518. a) $m\sqrt{2}$; b) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

519. a) 450;
b) 2. *Nurodymas.* Subendravardiklinkite ir skaitiklyje esančiam reiškiniui taikykite dviejų narių sumos (skirtumo) kvadrato formulę.

520. *Nurodymas.* Prisiminkite, kad kartais literatūroje išlaidos dar vadinamos kaštais arba sąnaudomis. Be to, pelnas — tai pajamų ir išlaidų skirtumas (jei išlaidos viršija pajamas, tai pelnas pasidaro neigiamas ir tokiu atveju išlaidų ir pajamų skirtumas vadinamas nuostoliu).
Taigi, jeigu pelnas yra tarp 70 Lt ir 80 Lt, o pajamos — 950 Lt, tai prekybos kaštai yra tarp $950 - 80 = 870$ (Lt) ir $950 - 70 = 880$ (Lt).
Atsakymas. **E.**

521. Norint atsakyti į klausimą, kuris įvykis tikėtinesnis, skaičiuojamos ir palyginamos tų įvykių tikimybės.
a) Įvykiui A yra palankios 2 baigtys iš trisdešimt šešių vienodai galimų baigčių: (1; 2), (2; 1). Įvykiui B yra palankios 3 baigtys iš tų pačių trisdešimt šešių vienodai galimų baigčių: (1; 3), (2; 2), (3; 1). Taigi įvykiui B įvykti yra daugiau galimybių negu įvykiui A, todėl įvykis B yra labiau tikėtinas už įvykį A.
b) Įvykiui A yra palankios 12 baigčių iš trisdešimt šešių vienodai galimų baigčių: (1; 2), (1; 5), (2; 1), (2; 4), (3; 3), (3; 6), (4; 2), (4; 5), (5; 1), (5; 4), (6; 3), (6; 6). Įvykiui B yra palankios 9 baigtys iš tų pačių trisdešimt šešių vienodai galimų baigčių: (1; 3), (2; 2), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2), (6; 6). Taigi įvykiui A įvykti yra daugiau galimybių negu įvykiui B, todėl įvykis A labiau tikėtinas už įvykį B.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

522. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.

4.7. Daugiakampių panašumas

Šis skyrelis visiems mokiniams neprivalomas. Daugiakampių panašumas apibrėžiamas kaip ir trikampių panašumas. Analogiškos ir savybės.

Pakartoti panašių trikampių apibrėžimą ir savybes (perimetrų ir plotų santykius).

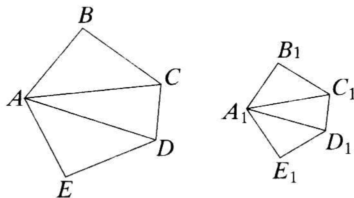
Išmokti:
kokius daugiakampius vadiname panašiais;
kam lygūs panašių daugiakampių perimetrų ir plotų santykiai.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas panašiųjų daugiakampių apibrėžimas ir įrodoma, kad jei panašiųjų daugiakampių panašumo koeficientas yra k, tai tų daugiakampių perimetrų santykis lygus k, o plotų santykis — k^2.

   Pastaba. Nagrinėjant panašių daugiakampių plotų santykį įrodymą reikėtų detalizuoti (pagrįsti, kodėl trikampiai, į kuriuos padalyti panašieji daugiakampiai, yra panašūs).

   Įrodymas. 1) Kadangi daugiakampis $ABCDE$ panašus į daugiakampį $A_1B_1C_1D_1E_1$, tai $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$ ir $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$.



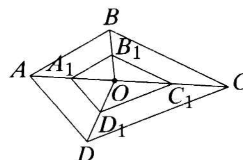
   2) $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų $\left(\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \angle B = \angle B_1\right)$, todėl $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

   3) $\triangle AED \backsim \triangle A_1E_1D_1$, nes $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{ED}{E_1D_1}$ ir $\angle E = \angle E_1$, todėl $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{ED}{E_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$;

   4) $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$, nes $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

2. Pateikiama 1 užduotis siekiant parodyti, kaip galima nubraižyti keturkampį, panašų į duotąjį (kad vienas jų būtų kito viduje).

   Pastabos. 1) Pateikiame 1 užduoties 3 punkto įrodymą.



   Įrodymas. Pagal atvirkštinę Talio teoremą ir jos išvadą: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{OD}{OD_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, t. y. $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD}$. Kadangi $\triangle OAB \backsim \triangle OA_1B_1$, o $\triangle OBC \backsim \triangle OB_1C_1$, tai $\angle OBA = \angle OB_1A_1$, $\angle OB_1C_1 = \angle OBC$. Vadinasi, $\angle B_1 = \angle OB_1A_1 + \angle OB_1C_1 = \angle OBA + \angle OBC = \angle B$. Analogiškai įrodoma ir kitų atitinkamų kampų lygybė.

   2) Užduoties 4 punkte prašoma rasti panašumo koeficientą. Kadangi 3 punkte buvo prašoma įrodyti, kad $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$, tai $k = \frac{1}{2}$. Galima paklausti mokinių, kaip nubraižyti keturkampį $A_1B_1C_1D_1$, panašų į keturkampį $ABCD$, kai $k = 2$.

   3) Analogiškai galima nubraižyti į bet kokį n-kampį panašų n-kampį.

3. Pateikiama 2 užduotis siekiant parodyti, kaip kitaip galima nubraižyti panašų n-kampį į duotą (kad vienas jų būtų kito išorėje) imant pavyzdžiu trikampį.

   Pastabos. 1) Pateikiame 3 užduoties punkto įrodymą.

   Įrodymas. Kadangi $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC}$, tai pagal atvirkštinę Talio teoremą $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$, o pagal Talio teoremos išvadą $\frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{A_1C_1}{AC}$, t. y. $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Kadangi trikampių $A_1B_1C_1$ ir ABC kraštinės yra proporcingos, tai šie trikampiai yra panašūs.

   2) Kadangi buvo prašoma įrodyti, kad $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, tai atsakant į 4 punkto klausimą reikia laikyti k lygų 3.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

523–531 ir 533 uždaviniai — teminiai; 532, 534–538 — kartojimo.

523. a) 159 cm; b) 74,2 cm.

524. a) 12,5 dm ir 10 dm; b) 7,5 dm ir 15 dm; c) 13,5 dm ir 9 dm; d) 9 dm ir 13,5 dm. *Nurodymas.* $0,(6) = \frac{2}{3}$.

525. $\frac{140}{3}$ dm ir $\frac{56}{3}$ dm.

526. a) 1617 cm^2 ir 825 cm^2; b) 488,4 cm^2 ir 1953,6 cm^2.

527. $245\frac{605}{671}$ cm $\approx$ 245,9 cm; $509\frac{605}{671}$ cm $\approx$ 509,9 cm.

72–75

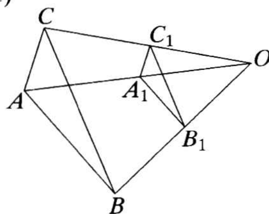
Uždavinyne 4 skyriaus atsakymuose 75* uždavinio sprendimo gale vietoj „(Plg. 6 skyrius, 87 uždavinys)“ turi būti „(Plg. 6 skyrius, 83 uždavinys)“.

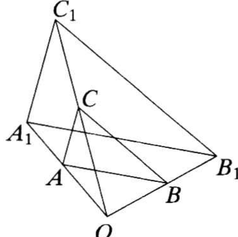
528. a) Pirmojo daugiakampio perimetrą ir plotą pažymėkime P_1 ir S_1, o antrojo — P_2 ir S_2. Turime: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8} = k$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{100}{256} = \frac{25}{64} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = k^2$. Taigi, jeigu šie daugiakampiai turi po vienodą kraštinių skaičių ir jų atitinkami kampai yra lygūs, tai jie panašūs.

b) Kadangi $\frac{P_1}{P_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = k$, o $\frac{S_1}{S_2} = \frac{100}{570} = \frac{10}{57} \neq \left(\frac{2}{3}\right)^2$, tai šie daugiakampiai nėra panašūs.

529. *Nurodymas.* Įrodykite, kad $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$.

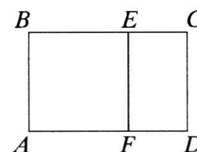
530. Ne, kai rombas nėra kvadratas, nes jų kampai nėra lygūs, nors kraštinės ir proporcingos. Taip, kai rombas yra kvadratas (visi kvadratai yra panašūs).

531. a) 1) 

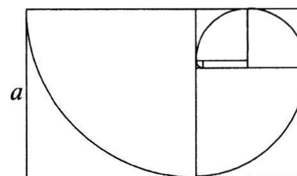
2) 

Analogiškai braižome ir b) punkte.

532. Sakykime, kad trumpesnioji stačiakampio $ABCD$ kraštinė lygi a ($AB = a$). Tuomet $\frac{BC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ir $BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. Kadangi $ABEF$ — kvadratas, tai $EC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a - a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. $\frac{EF}{EC} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Taigi stačiakampis $EFDC$ — auksinis. Jeigu stačiakampį $EFDC$ padalysime į kvadratą ir mažesnį stačiakampį, tai vėl gausime auksinį stačiakampį.



Pastaba. Galima pasakyti mokiniams, kad įbrėžus į kiekvieną taip gaunamą stačiakampio kvadratą ketvirtį apskritimo gaunama „graži" spiralė. Paprašykite jų apskaičiuoti spiralės, kuri nubrėžta 5 kvadratuose, ilgį.



533. Pirmame ir antrame brėžiniuose.

534. Kadangi parabolės viršūnės taško koordinatės yra $(-5; 2)$, tai $m = 5$ ir $n = 2$. Todėl $y = a(x + 5)^2 + 2$. Pagal sąlygą, kad taškas A priklauso parabolei, tai taško koordinatės tenkina parabolės lygtį: $-14 = a(-1 + 5)^2 + 2$, $a = -1$.

Atsakymas. $a = -1$, $m = 5$, $n = 2$.

535. Duotoji sistema ekvivalenti lygčių sistemai $\begin{cases} y = -3{,}5x + 5{,}5, \\ y = -\frac{a}{7}x + \frac{22}{7}, \end{cases}$ o pastaroji:

a) turi vieną sprendinį, kai $k_1 \neq k_2$, t. y. $-\frac{a}{7} \neq -3{,}5$, $a \neq 24{,}5$;

b) turėtų be galo daug sprendinių, jeigu $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$. Kadangi $b_1 = 5{,}5 \neq \frac{22}{7} = b_2$, tai sistema negali turėti be galo daug sprendinių ir tokios a reikšmės nėra.

Atsakymas. a) $a \neq 24{,}5$; b) tokios a reikšmės nėra.

536. $(-1{,}5; 2)$.

Nurodymas. Reikia spręsti lygčių sistemą $\begin{cases} 2x + 7y = 11, \\ 4x + 6y = 6. \end{cases}$

537. a) $x < 28$; b) $x \leqslant -5$.

538. a) Ne. *Pastaba.* Atkreipkite dėmesį, kad antroje sistemoje antroje lygtyje yra tik vienas nežinomasis — x;

b) ne.

5. KVADRATINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Vienas svarbiausių mokytojo uždavinių pagrindinėje mokykloje — išmokyti *visus* mokinius spręsti paprastas kvadratines lygtis. Tai tradicinė pagrindinės mokyklos matematikos kurso tema. Paprastai mokytojai čia pasiekia gerų rezultatų, todėl, atrodo, ir nebūtina apie kvadratinių lygčių sprendimą daug ką kalbėti, aiškinti ar nurodinėti.

Galima būtų tik pasakyti, kad net patys silpniausi mokiniai turi išmokti spręsti kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) skaičiuodami diskriminantą. Žinoma, ir toks tradicinis kvadratinių lygčių sprendimo būdas kai kuriems mokiniams sunkiai „įkandamas“, nes reikia teisingai nustatyti koeficientus a, b, c ir nesuklysti skaičiuojant reiškinių $D = b^2 - 4ac$, $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ ir $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ reikšmes.

Daugiausia problemų mokiniams atsiranda, kai:

— koeficientai a ir b būna lygūs $+1$ arba -1;

— lygtis būna nepilnoji ($b = 0$ arba $c = 0$; arba ir $b = 0$, ir $c = 0$);

— lygtis užrašyta nestandartiniu pavidalu, t. y. sukeitus narius vietomis arba perkėlus kai kuriuos jų į kitą lygties pusę.

Todėl kartais mokant šios temos priklausomai nuo mokinių lygio tenka skirti nemažai laiko ir pastangų.

Dabartiniuose vadovėliuose kvadratinės lygtys nagrinėjamos kiek kitaip, negu tai buvo daroma tarybinių laikų vadovėliuose.

Anksčiau kvadratinių lygčių sprendimo mokymas nebuvo siejamas su kvadratinės funkcijos grafiku, t. y. ne visada mokoma lygtis spręsti grafiškai. Šiame vadovėlyje kvadratinės lygtys pirmiausia mokomos spręsti grafiškai (2 skyrius, 7 skyrelis), todėl kvadratinė funkcija ir jos grafikas (2 skyrius, 1–6 skyreliai) yra nagrinėjami prieš pradedant spręsti kvadratines lygtis.

Ankstesnėse klasėse mokiniai yra sprendę kvadratines lygtis. Dažniausiai buvo siūloma išspręsti *nepilnąsias* kvadratines lygtis pasinaudojant lygios nuliui sandaugos savybe. Mokiniai susidurdavo su nepilnosiomis kvadratinėmis lygtimis ir eidami geometrijos temas (kvadrato kraštinės ilgio radimas, kai žinomas jo plotas; Pitagoro teoremos taikymas ir pan.).

Šiame skyriuje apibendrinamos įgytos bei turimos žinios ir parodomas universalus (algebrinis) kvadratinių lygčių sprendimo būdas (remiantis diskriminantu).

Reikia siekti, kad mokiniai suprastų, jog kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) sprendinių formulė išvedama išskaidant jos kairiąją pusę tiesiniais dauginamaisiais. Po to remiantis lygios nuliui sandaugos savybe randami tos lygties sprendiniai. Galima sakyti, kad spręsdami kvadratinę lygtį ją pakeičiame tiesinių lygčių sprendimu. Idealu būtų, kad stipresnieji mokiniai ir praėjus kuriam laikui sugebėtų išspręsti pilnąją kvadratinę lygtį ne tik apskaičiavę diskriminantą, bet ir išskyrę dvinario kvadratą, ir išskaidę dauginamaisiais. Tokiai kvadratinių lygčių sprendimo metodikai ypač daug dėmesio skiriama Vakarų šalių mokyklose.

Taip pat labai svarbu, kad mokiniai matytų ryšį tarp funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nulių ir kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinių. Tai bus ypač aktualu mokantis spręsti kvadratines nelygybes (10 klasėje).

Pastabos. 1. Programos autorių buvo numatyta mokyti algebriškai spręsti kvadratines lygtis 10 klasėje, o 9 klasėje nagrinėti tik grafinį jų sprendimą. Vadovėlio autoriai, suderinę su programos autoriais, nutarė kvadratinių lygčių sprendimą visapusiškai nagrinėti 9 klasėje. Tai yra labai svarbi tema, todėl ją baigiant nagrinėti 10 klasėje gali nebeužtekti laiko sudaryti tvirtiems gebėjimams ir įgūdžiams.

2. Atkreipiame mokytojų dėmesį, kad vadovėlyje kvadratinės lygties sprendiniai nevadinami tos lygties šaknimis (skirtingai negu ankstesniais laikais). Šaknimis vadinamos polinomo (daugianario) kintamojo reikšmės, su kuriomis jis lygus nuliui. Aišku, kad nereikia laikyti klaida, jei lygties sprendiniai pavadinami šaknimis.

3. Šio skyriaus 1–5 skyreliai skirti visiems mokiniams, o 6 („Bikvadratinės lygtys“) — giliau besidomintiems matematika — būsimiems realinio profilio moksleiviams.

Minimalus lygmuo:

1. Atpažinti kvadratinę lygtį.
2. Gebėti išspręsti nepilnąją kvadratinę lygtį.
3. Gebėti išspręsti pilnąją kvadratinę lygtį.
4. Žinoti Vijeto teoremą.
5. Gebėti išskaidyti kvadratinį trinarį dauginamaisiais.

Pagrindinis lygmuo:

1. Gebėti išspręsti kvadratinę lygtį: grafiškai; skaidant dauginamaisiais; remiantis diskriminantu.
2. Gebėti spręsti kvadratines lygtis, remiantis Vijeto teorema.

Aukštesnis lygmuo:

1. Spręsti bikvadratines lygtis.
2. Mokėti išvesti kvadratinės lygties sprendinių formulę.

Galima sakyti, kad tai kartojimo skyrelis, tik čia įteisinama kvadratinės lygties sąvoka ir pabrėžiama, kad kvadratinė lygtis gali turėti du skirtingus sprendinius, vieną (du lygius) sprendinį arba sprendinių neturėti. Šiame skyrelyje būtina pasiekti, kad mokiniai išmoktų spręsti nepilnąsias kvadratines lygtis.

Pakartoti:

ką vadiname lygties sprendiniu;
tiesinės lygties su vienu nežinomuoju sprendimą;
sandaugos lygumo nuliui sąlygą;
kvadratų skirtumo formulę: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
bendrojo dauginamojo iškėlimą prieš skliaustus (skaidymą dauginamaisiais).

Išmokti:

atpažinti kvadratinę lygtį;
spręsti nepilnąsias kvadratines lygtis skaidant dauginamaisiais;
nustatyti nepilnosios kvadratinės lygties sprendinių skaičių.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami tiesinių lygčių su vienu nežinomuoju pavyzdžiai siekiant pakartoti, ką vadiname lygties sprendiniu.
   Pastaba. Atsakant į pirmąjį klaustuku pažymėtą klausimą, pasiūlykite mokiniams išspręsti pateiktas lygtis ir patikrinti, ar gauti sprendiniai paverčia tas lygtis teisingomis skaitinėmis lygybėmis.
2. Pateikiamas pavyzdys kvadratinės lygties, užrašytos tiesinių dauginamųjų sandauga lygia nuliui. Remiantis lygios nuliui sandaugos savybe ta lygtis išsprendžiama ir teigiama, kad taip bus sprendžiamos ir aukštesnio negu pirmojo laipsnio (kvadratinės) lygtys.
   Pastabos. 1) Pateikus keletą kvadratinių lygčių pavyzdžių reikėtų pabrėžti, kad tokias lygtis spręsime skaidydami jos kairiąją pusę dauginamaisiais.
   2) Stipresniems mokiniams reikėtų paaiškinti, kad sudėtingesniais atvejais nepakanka, kad bent vienas dauginamasis būtų lygus nuliui, pavyzdžiui, $(3x - 6) \cdot \frac{5}{x-2} = 0$.
   Atsakydami į antrąjį klaustuku pažymėtą klausimą, mokiniai pirmiausia turėtų atskliausti kairiąją lygties pusę, sutraukti panašiuosius narius ir lygtį parašyti pavidalu $ax^2 + bx + c = 0$. Aišku, gudresni mokiniai iš karto gali pasakyti, kad aukščiausias nežinomojo laipsnis yra 2.
   Pastabos. 1) Kai mokiniai lygtį $(x - 2)(3 - x) = 0$ užrašys pavidalu $-x^2 + 5x - 6 = 0$, galima iškelti probleminį klausimą, „kaip išskaidyti kairiąją tos lygties pusę dauginamaisiais?“ ir pasakyti, kad šiame skyriuje tai išmoksime padaryti. Pasiūlykite mokiniams keleto paprastesnių kvadratinių lygčių kairiąsias puses išskaidyti dauginamaisiais, pavyzdžiui: $3x^2 - 27x = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, ir rasti jų sprendinius.
   2) Vadovėlyje pateikta kvadratinių lygčių pavyzdžių ir pasakyta, kad jose nežinomasis yra antrojo laipsnio, turint omenyje, jog *aukščiausias* nežinomojo laipsnis lygus 2.
3. Išsprendžiami du realaus turinio uždaviniai, kuriuos sprendžiant gaunamos nepilnosios kvadratinės lygtys: $x^2 - 144 = 0$ ir $x^2 - 6x = 0$.
   Šių lygčių kairiąsias puses nesunkiai pavyksta išskaidyti pirmojo laipsnio dauginamaisiais.
   Nurodymas. Dar kartą atkreipkite mokinių dėmesį, kad lygčių sprendiniai nebūtinai turi būti realaus uždavinio atsakymai. Reikia atmesti tuos lygčių sprendinius, kurie netenkina uždavinio sąlygos, dar kartą (prieš rašant atsakymą) patikrinti, ko klausia uždavinys.
   Pastabos. 1) Atkreipiame dėmesį, kad lygtį $x^2 - 144 = 0$ galima spręsti įvairiai:
   I būdas. Skaidant kairiąją jos pusę dauginamaisiais (kaip ji ir išspręsta vadovėlyje).
   II būdas. Braižant funkcijų $y = x^2 - 144$ ir $y = 0$ (arba $y = x^2$ ir $y = 144$) grafikus. Tų grafikų (parabolės ir tiesės) susikirtimo taškų abscisės ir yra duotosios lygties sprendiniai.
   III būdas. $x^2 = 144$. Ieškome tokių x reikšmių, kurias pakėlę kvadratu gauname 144, kitaip sakant, nesunkiai atspėjame, kad skaičiai -12 ir 12 yra lygties sprendiniai.
   IV būdas. $x^2 = 144$. Iš abiejų lygties pusių traukiame kvadratinę šaknį: $\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$, $|x| = 12$, iš čia $x_1 = -12$, $x_2 = 12$. Šio būdo nerekomenduojame, nes jis pakankamai sudėtingas, daugeliui mokinių sunkiai suprantamas.
   2) Atkreipiame dėmesį, kad lygtį $x^2 - 6x = 0$ galima išspręsti ir abi jos puses dalijant iš $x \neq 0$. Reikia nagrinėti du atvejus: 1) $x = 0$, 2) $x \neq 0$. Pirmuoju atveju matome, kad reikšmė $x = 0$ yra lygties sprendinys. Antruoju atveju dalijame iš x (nes $x \neq 0$): $x^2 - 6x = 0$, $x - 6 = 0$, $x = 6$. Vadinasi, lygties sprendiniai yra $x_1 = 0$ ir $x_2 = 6$.
4. Įvedamos pilnosios ir nepilnosios kvadratinės lygties sąvokos. Pavyzdžiais parodoma, kad kvadratinė lygtis gali turėti du sprendinius, vieną sprendinį arba sprendinių neturėti.
   Pastabos. 1) Atkreipkite mokinių dėmesį į lygties $x^2 + 4 = 0$ sprendimą. Prie abiejų lygties pusių pridėję po -4, iš lygties $x^2 = -4$ nesunkiai nustatome, kad ji sprendinių neturi. Kad lygtis sprendinių neturi, galima pastebėti ir nepertvarkant lygties $x^2 + 4 = 0$, t. y. samprotaujant taip: x^2 visada yra didesnis arba lygus nuliui, o prie neneigiamo skaičiaus pridėję 4 gauname skaičių, didesnį už nulį. Vadinasi, nėra tokių x, kad lygybė būtų teisinga.
   2) Kai kvadratinė lygtis turi vieną sprendinį, kartais sakoma, kad ji turi du lygius sprendinius.

Tai patogu, kai skaidome dauginamaisiais kvadratinį trinarį, kurio šaknys yra kartotinės ($x_1 = x_2$): $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.

5. Teorinės dalies pabaigoje pateikiama nepilnųjų kvadratinių lygčių pavidalo ir sprendinių skaičiaus lentelė. Su visais mokiniais jos neverta aptarinėti: galima mokinių paprašyti sugalvoti atitinkamų pavyzdžių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 539–552 uždaviniai. Pagrindinis tikslas — išmokyti spręsti nepilnąsias kvadratines lygtis. Tokios lygtys pateiktos 541–552 pratimuose. Žinoma, nėra būtina spręsti visus uždavinius arba spręsti tik vadovėlio ir uždavinyno uždavinius. Mokytojai gali pateikti ir savų uždavinių. 553–560 — kartojimo pratimai. 1–8, 9b, 10a

539. a), c), e) — pirmojo laipsnio; b), d), f), g), h) — antrojo laipsnio; i) — atskliaudę ir sukėlę visus narius į vieną pusę gauname $2x^2 - 2x^2 - 2x + 2x = 0$, $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x = 0$. Gavome lygtį pavidalo $ax^2 + bx + c = 0$, kur $a, b, c = 0$. Kadangi $a = 0$, tai lygtis nėra kvadratinė (žr. kvadratinės lygties apibrėžimą). 8 klasėje (II dalis, 7 skyrius, 1 skyrelis) buvo apibrėžta tiesinė lygtis su vienu nežinomuoju: „Lygtį, kurią galima užrašyti pavidalu $ax = b$ (a ir b skaičiai, x — nežinomasis), vadiname tiesine lygtimi su vienu nežinomuoju“.
Apibrėžime neuždrausta a būti lygiam 0, todėl šią lygtį būtų galima vadinti pirmojo laipsnio lygtimi. Žinoma, gilintis į tokius subtilumus neverta; geriau paklausti mokinių, kiek ši lygtis turi sprendinių.

540. Mokiniai nesunkiai turėtų pateikti po 3 kvadratinių lygčių pavyzdžius. Po to galima paprašyti nurodyti, kurio iš pavidalų: $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = 0$ ($a, b, c \neq 0$) yra jų parašytos lygtys, ir paprašyti nurodyti, kurios iš jų yra pilnos, o kurios — ne. Žinoma, galima paprašyti užrašyti ir visų keturių aukščiau nurodytų kvadratinių lygčių pavyzdžių.

541. Silpnesni mokiniai lygtis turėtų spręsti skaidydami dauginamaisiais. Čia tikrai nereikia mokyti spręsti a)–f) lygtis iš abiejų pusių traukiant kvadratinę šaknį, o g)–i) — dalijant abi puses iš $x \neq 0$. Galima spręsti ir mintinai.
Atsakymas. a) -1; 1; b) 0; c) -3; 3; d) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; e) -7; 7; f) -5; 5; g) 0; $\frac{1}{4}$; h) 0; 7; i) -3; 0.

542. Čia pateikiamos lygtys, kurių pavidalas yra $ax^2 + c = 0$ ($a, c \neq 0$). Jos yra šiek tiek sudėtingesnės negu lygtys pavidalo $ax^2 + bx = 0$. Todėl šį uždavinį siūlome išnagrinėti su visais, net ir pačiais silpniausiais mokiniais.
Atsakymas. a), c), d), e), f) — sprendinių neturi; b) -6; 6.

543. Šiame uždavinyje a)–h) lygtys yra pavidalo $ax^2 + bx = 0$ ($a, b \neq 0$). Jos nesunkiai sprendžiamos skaidant dauginamaisiais. Nors šių lygčių sprendiniai yra trupmeniniai skaičiai, stipresni mokiniai jas gali spręsti ir mintinai. h) lygtį patogu suprastinti abi puses dalijant iš 7; i) ir j) lygtys sprendžiamos kairiąją pusę skaidant dauginamaisiais pagal kvadratų skirtumo formulę (tik siūlome pirmiau spręsti j) punktą, nes i) punkte dar reikia prieš taikant formulę abi lygties puses padalyti iš 3); k) punkto lygtis yra trečiojo laipsnio (tai galite aptarti su mokiniais), bet ji nesunkiai sprendžiama skaidant dauginamaisiais; e) punkte nereikia atskliaudinėti, nes po to trinarį $z^2 + 5z + 6$ sunkiau išskaidyti dauginamaisiais.
Atsakymas. a) 0; $\frac{4}{3}$; b) 0; $\frac{6}{5}$; c) 0; $\frac{7}{5}$; d) $-\frac{7}{10}$; 0; e) 0; $\frac{3}{4}$; f) 0; $\frac{1}{6}$; g) -2; 0; h) 0; $\frac{1}{2}$; i) -3; 3; j) -5; 5; k) $-\frac{1}{4}$; 0; l) -3; -2.

544. Reikėtų su mokiniais pasiaiškinti sąlygą ir aptarti sprendimo eigą. Žinoma, šį uždavinį galima spręsti grafiškai, bet tada gali nepavykti rasti tikslių sprendinių.
Atsakymas. a) -2; 2; b) -2; 0.

545. a) Nebūtina spręsti lygtį. Iš karto aišku, kad duotoji lygtis turi du sprendinius, vienas kurių 0, todėl atsakymai **A** ir **C** netinka. Belieka patikrinti, kuris iš skaičių, $\frac{2}{35}$ ar 17,5, yra duotosios lygties sprendinys (tai galima atlikti ir skaičiuokliu).
b) Šiuo atveju, matyt, paprasčiau išspręsti lygtį: $x^2 - 10x + 25 = 45 - 10x$, $x^2 - 20 = 0$. Ankstesniuose šio skyrelio pratimuose analogiškų lygčių sprendiniai buvo racionalieji skaičiai. Čia mokiniams gali iškilti problemų skaidant kairiąją lygties pusę dauginamaisiais. Todėl teks prisiminti kvadratinės šaknies savybę: $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geqslant 0$) ir vietoj 20 parašyti $(\sqrt{20})^2$. Be abejo, visai nesunku pastebėti, kad lygties $x^2 - 20 = 0$ sprendiniai pateikti **C** punkte.
Atsakymas. a) **D**; b) **C**.

546. a) 0; 4,2; b) −2,5; 0; c) 0; 4; d) 0; 1; e) −18; 18; f) −5; 5.

547. a) −2; 2; b) −3; 3.

548. a) −1 ir 1; $-\frac{2}{5}$ ir $\frac{2}{5}$; −11 ir 11; $-\sqrt{13}$ ir $\sqrt{13}$;
b) −3 ir 3; −10 ir 10; −1,2 ir 1,2; $-\frac{1}{3}$ ir $\frac{1}{3}$.

Sąlygoje geriau būtų klausti: „Su kuriomis x reikšmėmis..."

549. Sakykime, kad atviruko plotis yra x cm. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x \cdot 0{,}75x = 48$, $x_1 = -8$ (netinka), $x_2 = 8$.
Atsakymas. Atviruko aukštis yra 6 cm, plotis — 8 cm.

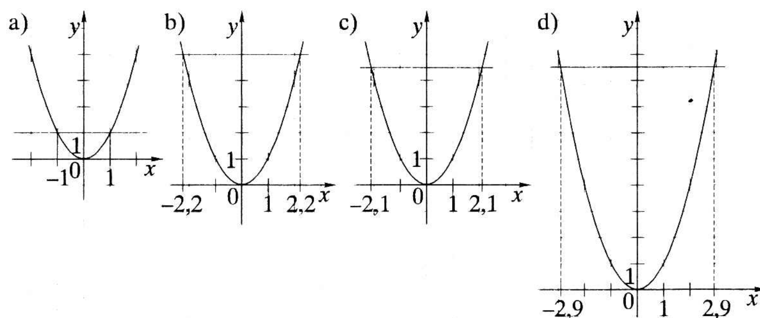
Stačiakampio ilgiu šiaipjau vadinama jo ilgesnioji kraštinė. Kartais patogu kalbėti apie paveikslo ar knygos plotį ir aukštį.

550. Kadangi sąlygoje pasakyta, kad lygtis $ax^2 + bx = 0$ yra kvadratinė, tai reiškia, kad $a \neq 0$ (pagal apibrėžimą), o tokia lygtis visada turi nulinį sprendinį ($x = 0$). Kvadratinė lygtis $ax^2 + bx = 0$ turi du sprendinius, kai $b \neq 0$ ($x = 0$ ir $x = -\frac{b}{a}$); kai $b = 0$, lygtis turi vieną sprendinį (du lygius sprendinius) $x = 0$. Jei sąlygoje būtų klausiama, ar pavidalo $ax^2 + bx = 0$ lygtis gali neturėti sprendinių (nepasakant, kad ta lygtis yra kvadratinė), tai reikėtų tirti atvejį, kai $a = 0$, bet vis tiek tokia lygtis neturėti sprendinių negali.

551. Sodo plotį pažymėkime x m, tada ilgis — $5x$ m. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $(x + 9) \cdot 5x = 4 \cdot x \cdot 5x$, $x_1 = 0$ (netinka), $x_2 = 3$.
Atsakymas. Sodo matmenys 15 m × 3 m.

Akylesni mokiniai tikriausiai pastebės, kad tokių matmenų žemės sklypas nelabai gali būti sodas.

552. Iš sąlygos aišku, kad lygtis reikia spręsti grafiškai, o sprendžiant grafiškai dažniausiai randami apytiksliai sprendiniai. Bet galite paprašyti mokinių nurodyti ir tikslius sprendinius.



Atsakymas. a) −1; 1; b) ≈ −2,2; 2,2; c) ≈ −2,1; 2,1; d) ≈ −2,9; 2,9.

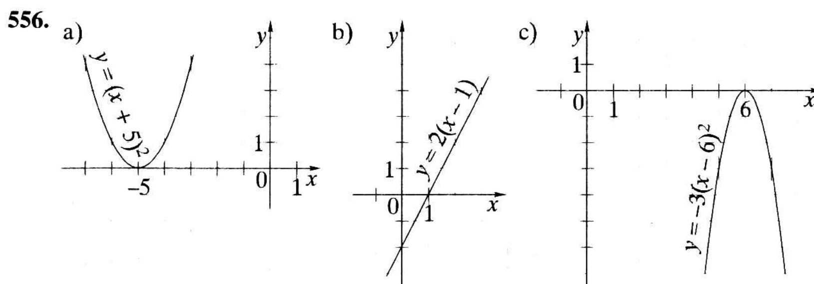
553. 15 cm. *Nurodymas.* Galima remtis Talio teorema, trikampių panašumu.

554. Patogu pažymėti didesnįjį trapecijos pagrindą $7x$, mažesnįjį $3x$.
Tada $7x - 3x = 32$, $x = 8$ cm. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 56 cm ir 24 cm, o vidurinės linijos ilgis lygus $\frac{56+24}{2} = 40$ (cm).
Atsakymas. 40 cm.

555. *I būdas.* Jei valtis pasroviui plaukė t valandų, tai prieš srovę — $(5 - t)$ valandų. Pagal sąlygą: $18t = 12(5 - t)$, $30t = 60$, $t = 2$. Atstumas tarp miestelių $18 \cdot 2 = 12 \cdot (5 - 2) = 36$ (km).
II būdas. Kadangi plaukiant pasroviui valties greitis yra $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ karto didesnis negu plaukiant prieš srovę, tai pasroviui valtis užtruko $\frac{3}{2}$ karto mažiau laiko negu plaukiant prieš srovę. Jei valtis pasroviui plaukė t valandų, tai prieš srovę — $\frac{3}{2}t$ valandų. Iš viso kelionė truko 5 valandas, todėl $t + \frac{3}{2}t = 5$, $t = 2$.
Atsakymas. Pasroviui valtis plaukė 2 h, prieš srovę — 3 h, atstumas tarp miestelių yra 36 km.

Galite mokinių paklausti, koks upės tėkmės greitis. (Jį nesunkiai galima apskaičiuoti radus greičių pasroviui ir prieš srovę aritmetinį vidurkį.)

556.



557. Jei taškas priklauso funkcijos grafikui, tai jo koordinatės tenkina tos funkcijos lygtį. Nesunku nustatyti, kad visų duotųjų taškų koordinatės tenkina lygtį $y = -\frac{12}{x}$.

Atsakymas. Taip.

Pastaba. Funkciją $y = \frac{k}{x}$ vienareikšmiškai galima nusakyti nurodant vieno tos funkcijos grafikui priklausančio taško koordinates. Pavyzdžiui, per tašką $(1; 3)$ eina vienintelė hiperbolė $y = \frac{3}{x}$.

Taip pat vienu tašku (nesutampančiu su tašku $(0; 0)$) galima nusakyti funkciją $y = kx$.

Tiesinei funkcijai $y = kx + b$ nusakyti nepakanka vieno taško (per vieną tašką galima nubrėžti be galo daug tiesių), o reikia dviejų taškų.

Funkciją $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ galima nusakyti nurodant bet kurį tašką, nesutampantį su koordinačių pradžios tašku.

Funkciją $y = ax^2 + b$ $(a, b \neq 0)$ — nurodant bet kuriuos du taškus, nesimetriškus tiesės $x = 0$ (y ašies) atžvilgiu.

Funkciją $y = ax^2 + bx$ $(a, b \neq 0)$ — nurodant bet kuriuos du taškus, nesimetriškus tiesės $x = -\frac{b}{a}$ atžvilgiu.

Funkciją $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \neq 0)$ — nurodant bet kuriuos du taškus, nesimetriškus tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu.

Stipresniems mokiniams galima pateikti daugiau tokio tipo uždavinių imant aukščiau išvardytas funkcijas.

558. Skaičiuokliu galima rasti duotųjų skaičių apytiksles dešimtaines reikšmes ir remiantis gautais rezultatais išdėstyti duotuosius skaičius didėjimo tvarka, bet taip uždavinį spręsti leiskite tik silpnesniems mokiniams. Stipresnieji mokiniai turėtų remdamiesi pagrindine trupmenos savybe pertvarkyti skaičius taip, kad jų vardikliai būtų vienodi, pvz.,

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{18}}{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{20}}{6}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{6}$.

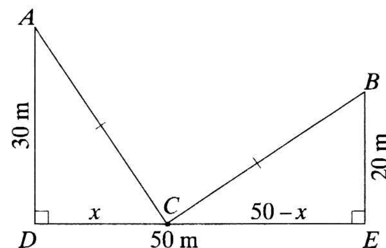
Atsakymas. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

559. a) 454; b) $66\frac{2}{3}\%$.

560. Verta nusibraižyti brėžinį. Ieškomą atstumą pažymėkime x.

1) Iš karto reikia pastebėti, kad $AC = BC$, nes abu paukščiai skrido vienodu greičiu, todėl per tą patį laiką nuskrido vienodą atstumą.
2) Iš stačiojo trikampio ADC: $AC^2 = 30^2 + x^2$.
   Iš stačiojo trikampio BEC: $BC^2 = 20^2 + (50 - x)^2$.
3) $30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$, $x = 20$.

Atsakymas. 20 m.



5.2. Pilnosios kvadratinės lygties sprendimas

Šiame skyrelyje siekiama trijų dalykų:

1) tęsiant pirmo skyrelio mintį parodoma, kad skaidant tiesiniais dauginamaisiais galima išspręsti ir pilnąją kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$;
2) primenama, kaip kvadratinė lygtis sprendžiama grafiškai;
3) ruošiamasi kvadratinės lygties sprendinių formulės išvedimui.

Visi šie trys momentai yra svarbūs kvadratinės lygties sprendimo suvokimui, todėl reikia siekti, kad šio skyrelio *teorinę* medžiagą mokiniai suprastų. Bet nerekomenduojame mokant šios temos spręsti labai daug uždavinių. Nebūtina reikalauti, kad visi mokiniai mokėtų spręsti pilnąją kvadratinę lygtį išskirdami dvinario kvadratą.

Pakartoti:
formules: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
kvadratinės funkcijos grafiko braižymą;
grafinį kvadratinės lygties sprendimą.

Išmokti:
spręsti pilnąsias kvadratines lygtis išskiriant dvinario kvadratą;
nustatyti, kiek sprendinių turi pilnoji kvadratinė lygtis.

Šiame skyrelyje:

1. Išsprendžiama kvadratinė lygtis, kurios kairiąją pusę galima išskaidyti dauginamaisiais remiantis formule $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

   Pastaba. Ne visi mokiniai lygtyje $(x + 5)^2 = 0$ mato du dauginamuosius, todėl ypač silpnesniems mokiniams reikia pabrėžti, kad $(x + 5)^2 = (x + + 5)(x + 5)$, iš kur matosi, kad lygtis turi du lygius sprendinius.

   Ta pati lygtis išsprendžiama ir grafiškai. Reikėtų priminti mokiniams, kad parabolės $y = (x + m)^2$ grafiką galima gauti pastūmus parabolės $y = x^2$ grafiką per m vienetų x ašies kryptimi. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog lygties $x^2 + 10x + 25 = 0$ sprendinys yra parabolės $y = x^2 + 10x + 25$ ir tiesės $y = 0$ (x ašies) bendro taško koordinatė x.

2. Išsprendžiama kvadratinė lygtis, kurios kairiosios pusės negalima parašyti dvinario kvadratu — pritaikius formulę $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

   Į lygtį įeinantis kvadratinis trinaris $x^2 - 6x - 7$ vadovėlyje išskaidytas dauginamaisiais mokiniams dar nežinomu būdu — išskiriant dvinario kvadratą. Kaip tai daroma, vadovėlyje nėra paaiškinta žodžiais, todėl mokytojui teks tai padaryti pačiam. Samprotauti galima būtų maždaug taip: „Iš pirmųjų dviejų narių $x^2 - 6x$ matome, kad galime sudaryti dviejų narių *skirtumo* kvadratą, t. y. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Laikydami x^2 pirmojo nario kvadratu, o $6x$ — pirmojo ir antrojo nario dviguba sandauga nustatome, kad antrasis narys lygus 3, nes $6x = 2 \cdot x \cdot 3$. Norimą dvinario kvadratą gausime prie $x^2 - 6x$ pridėję antrojo nario kvadratą (3^2), t. y. $x^2 - 6x + 3^2$. Kad gautasis reiškinys būtų tapačiai lygus pradiniam, turime atimti tai, ką pridėjome (3^2). Taigi $x^2 - 6x - 7 = \underline{x^2 - 6x + 3^2} - 3^2 - 7 = (x - 3)^2 - 16$. Gauname lygtį $(x - 3)^2 - 16 = 0$“. Toliau kairiąją lygties pusę skaidome dauginamaisiais pagal kvadratų skirtumo formulę $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

   Pastabos. 1) Trinarį $x^2 - 6x - 7$ galima išskaidyti dauginamaisiais ir grupavimo būdu, nagrinėtu 8 klasėje (I dalis, 3 skyrius, 6 skyrelis): $x^2 - 6x - 7 = x^2 - 7x + x - 7 = x(x - 7) + (x - 7) = (x - 7)(x + 1)$. Taip skaidyti nėra sudėtinga, bet eidami šiuo keliu nepasiruošiama kvadratinės lygties sprendinių formulės išvedimui, kuris remiasi dvinario kvadrato išskyrimu.

   2) Lygtį $(x - 3)^2 - 16 = 0$ galima išspręsti ir netaikant kvadratų skirtumo formulės: $(x - 3)^2 = 16$; $x - 3 = 4$ ir $x - 3 = -4$. Iš čia $x = 7$ ir $x = -1$. Šis būdas negeras tuo, kad viduryje darbo keičiame strategiją, t. y. nebesiekiame išskaidyti kairiosios lygties pusės dauginamaisiais, be to, yra pavojaus neteisingai suvokti kvadratinės šaknies prasmę, t. y. $\sqrt{16} = 4$, bet ne $\sqrt{16} = \pm 4$.

3. Išsprendžiama lygtis analogiška 2 uždavinio lygčiai, tik čia išskyrus dvinario kvadratą nebegalima taikyti kvadratų skirtumo formulės ir reikia laiku pastebėti, kad kvadratinė lygtis $(x - 1)^2 + 9 = 0$ sprendinių neturi, ir išskaidyti trinario $x^2 - 2x + 10 = (x - 1)^2 + 9$ tiesiniais dauginamaisiais nepavyksta. (Tai ir neįmanoma: jei kairę pusę išskaidytume, tai lygtis turėtų sprendinį.)

4. Remiantis aukščiau išnagrinėtais pavyzdžiais pateikiamos išvados apie kvadratinės lygties sprendinių skaičių ir grafinio sprendimo būdo ryšį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 561–571 pratimai; 572–579 — kartojimo pratimai. 10–12

561. a) Silpnesnieji mokiniai turėtų vietoj x į duotą lygtį įstatyti nurodytas reikšmes ir tikrinti, ar lygybė yra teisinga. Stipresnieji turėtų nesunkiai pastebėti, kad duotoji lygtis turi vienintelį sprendinį, nes $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

b) Čia, matyt, paprasčiausia yra tikrinti lygybę įstatant pateiktas reikšmes. Stipresnieji mokiniai, žinodami, kad kvadratinė lygtis daugiausia gali turėti du sprendinius, ir suradę antrąjį lygties sprendinį (11), turėtų suprasti, kad tikrinti, ar likusieji skaičiai yra lygties sprendiniai, nebeverta.

Atsakymas. a) 3; b) 3; 11.

562. a)–e) trinariai išskaidomi dauginamaisiais taikant formules $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. Tik f) punkte reikia išskirti dvinario kvadratą: $x^2 + 2x - 35 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 35 =$ $= (x+1)^2 - 36 = ((x+1) - 6)((x+1) + 6) = (x-5)(x+7)$.

Atsakymas. a) $(x-2)^2$; b) $(x-4)^2$; c) $(x+9)^2$; d) $(x-5)^2$; e) $(t-1)^2$; f) $(x-5)(x+7)$.

563. Sprendžiant b), d), e) ir f) pratimus galima samprotauti dvejopai: suteikus lygčiai pavidalą $(x \pm a)^2 - b = 0$ $(b > 0)$ skaidyti kairiąją jos pusę dauginamaisiais; arba turint pavidalą $(x \pm a)^2 = b$ rasti tokius skaičius, kuriuos pakėlę kvadratu gautume b. Būtų geriausia, kad mokiniai mokėtų tas lygtis išspręsti abiem būdais. Galima spręsti ir mintinai.

Atsakymas. a) -3; b) -1; 3; c) 1; d) -7; 17; e) -14; 8; f) $-\sqrt{6}-2$; $\sqrt{6}-2$.

Pastaba. Vadovėlyje nepateikta lygčių, kurios neturi sprendinių, todėl rekomenduojame pateikti tokių lygčių, pavyzdžiui: $(x-5)^2 + 4 = 0$; $(x+3)^2 = -1$. Taip pat galite pasiūlyti mokiniams (ypač stipresniems) išspręsti tokių lygčių, kaip pateikta f) punkte, kur atsakymas yra „negražūs“ (iracionalieji) skaičiai, pavyzdžiui: $(x-1)^2 - 5 = 0$, $(x+1)^2 = 11$.

564. Šias lygtis reikėtų spręsti skaidant dauginamaisiais: a)–c) — tiesiogiai taikome formules $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, d)–f) — pirmiausia išskiriame dvinario kvadratą, o po to taikome formulę $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

a) $(x+7)^2 = 0$; b) $(x+6)^2 = 0$; c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$;

d) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 9 = 0$; $(x-4)^2 - 25 = 0$, $(x-9)(x+1) = 0$;

e) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 8 = 0$; $(x-3)^2 - 1 = 0$, $(x-4)(x-2) = 0$;

f) $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$.

Atsakymas. a) -7; b) -6; c) $\frac{1}{2}$; d) -1; 9; e) 2; 4; f) -1; 2.

565. Vadovėlyje ne visai gerai suformuluota uždavinio sąlyga, nes nepasakyta, *kokios* lygties sprendinius reikia rasti. Todėl mokiniams reikia pasakyti, kad čia prašoma grafiškai išspręsti lygtis: a) $-3x^2 - 5x + 2 = 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; c) $x^2 + 3x + 8 = 0$.

Taigi reikia rasti tiesės $y = 0$ (x ašies) ir nubraižytų parabolių bendrų taškų abscises.

Atsakymas. a) -2; $\frac{1}{3}$; b) 1,5; c) sprendinių nėra.

Pastaba. Galima pasiūlyti mokiniams remiantis vadovėlio brėžiniais išspręsti ir kitokias lygtis, pavyzdžiui: a) $3x^2 - 5x + 2 = 4$; b) $4x^2 - 12x + 9 = 4$; c) $x^2 + 3x + 8 = 4$.

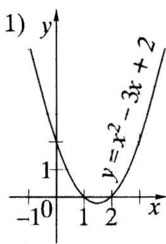
566. a) ir c) punktai yra analogiški 564d)–f) punktams. b) ir d) — skiriasi nuo kitų čia nagrinėtų tuo, kad koeficientas prie x^2 nelygus 1. Kai lygtis yra neredukuotoji, tai padalijus abi jos puses iš koeficiento a galima gauti redukuotąją lygtį. Tačiau skaidyti dauginamaisiais galime ir neredukuotąją lygtį.

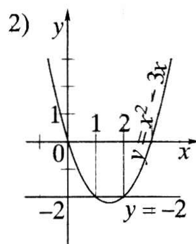
a) $((x-8)-4)((x-8)+4) = 0$; b) $x^2 - 3x + \frac{11}{4} = 0$, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$; arba $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 11 = 0$, $(2x-3)^2 + 2 = 0$; c) $((x+5)-8)((x+5)+8) = 0$; d) $x^2 + 2x - \frac{21}{2} = 0$, $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - \frac{21}{2} = 0$, $(x+1)^2 - \frac{23}{2} = 0$, $\left(x + 1 - \sqrt{\frac{23}{2}}\right)\left(x + 1 + \sqrt{\frac{23}{2}}\right) = 0$; arba $(\sqrt{2}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 - 21 = 0$, $(\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 - 23 = 0$, $(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{23})(\sqrt{2}x + \sqrt{2} + \sqrt{23}) = 0$.

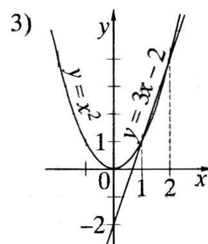
Atsakymas. a) 4; 12; b) sprendinių nėra; c) -13; 3; d) $-\sqrt{\frac{23}{2}} - 1$; $\sqrt{\frac{23}{2}} - 1$.

567. Sprendžiant kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ grafiškai, nebūtina jai suteikti pavidalą $a(x+m)^2 + n^2 = 0$, kaip tai buvo daroma teorinėje vadovėlio dalyje. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, ką reiškia išspręsti lygtį grafiškai. Prieš pradėdami spręsti mokiniai turi suvokti, kad lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai yra funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikų bendrų taškų abscisės, todėl sprendžiant lygtį grafiškai reikia braižyti kairiosios ir dešiniosios lygties pusių grafikus.

a) Lygtį $x^2 - 3x + 2 = 0$ galima spręsti įvairiai, braižant grafikus funkcijų: 1) $y = x^2 - 3x + 2$ ir $y = 0$; 2) $y = x^2 - 3x$ ir $y = -2$; 3) $y = x^2$ ir $y = 3x - 2$.



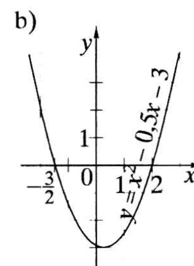


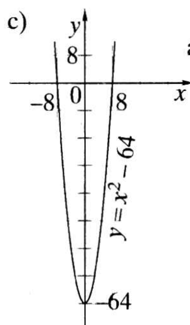


Lengviau yra rasti parabolės ir horizontaliosios tiesės susikirtimo taškų abscises (žr. 1) ir 2) brėž.). Todėl galite rekomenduoti mokiniams daug negudrauti ir rinktis 1) atvejį.

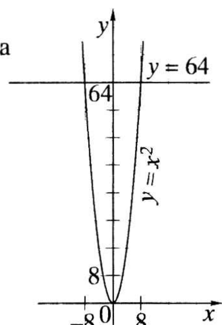
Pastaba. Stipresniems mokiniams galima pasiūlyti grafiškai išspręsti ir nelygybes $x^2 - 3x + 2 > 0$, $x^2 - 3x + 2 < 0$, $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$.

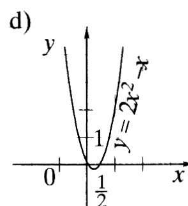
b) Čia patogiau braižyti parabolę $y = x^2 - 0{,}5x - 3$ ir tiesę $y = 0$, todėl pirmiausia geriau suteikti lygčiai įprastą pavidalą $x^2 - 0{,}5x - 3 = 0$.





arba

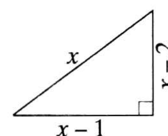




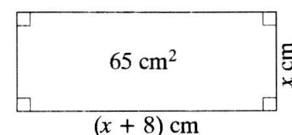
Atsakymas. a) 1; 2; b) $-\frac{3}{2}$; 2; c) -8; 8; d) 0; $\frac{1}{2}$.

Pastaba. Mokiniai gali gauti ir kitas reikšmes, artimas nurodytoms atsakyme. Ar teisingai išsprendė, mokiniai gali pasitikrinti įstatę gautas reikšmes į duotą lygtį.

568. $x^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2$,
$x^2 - 6x + 5 = 0$,
$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$,
$(x-3)^2 - 4 = 0$,
$(x-5)(x-1) = 0$,
$x_1 = 5$, $x_2 = 1$ (netinka).
Atsakymas. 12 cm.



569. $x(x+8) = 65$,
$x^2 + 8x - 65 = 0$,
$(x-5)(x+13) = 0$,
$x_1 = 5$, $x_2 = -13$ (netinka).
Atsakymas. 5 cm ir 13 cm.

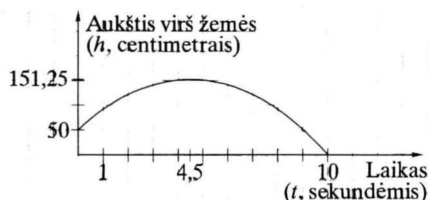


570. Prieš pradėdami spręsti šį uždavinį mokiniai turi suprasti formulės $h = 50 + 45t - 5t^2$ prasmę. Todėl ypač su silpnesniais mokiniais reikėtų pasiaiškinti, kad, pavyzdžiui: kai $t = 0$, tai $h(0) = 50$, t. y. kol raketa dar nepaleista (yra ant stalo), tai jos aukštis virš žemės lygus 50 cm; kai $t = 1$ (praėjus 1 sekundei po paleidimo), tai $h(1) = 90$ cm; kai $t = 5$, tai $h = 150$.

Analogiška situacija buvo nagrinėjama I skyriaus, 2 skyrelio teorinės dalies pradžioje (14 p.).

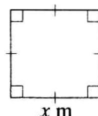
a) Kai raketa nukrenta ant žemės, tai $h = 0$. Vadinasi, reikia rasti tokią t reikšmę, kad $50 + 45t - 5t^2 = 0$, $t^2 - 9t - 10 = 0$, $(t - 4{,}5)^2 - 5{,}5^2 = 0$; $t_1 = 10$, $t_2 = -1$ (netinka).
Raketa nukris ant žemės po 10 sekundžių.

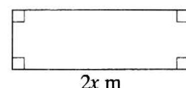
b) Reikia nubraižyti funkcijos $h = 50 + 45t - 5t^2$ grafiką. Pastebėkime, kad funkcija yra apibrėžta intervale [0; 10], nes spręsdami a) punktą gavome, kad raketa iš viso skrido 10 sekundžių.



Pastabos. 1) Mokiniai gali nusibraižyti parabolę $y = -5t^2 + 45t + 50$ ir išryškinti tą dalį, kur $t \in [0; 10]$. Aišku, kad gautas grafikas *nėra* raketos lėkimo trajektorija. Šis grafikas parodo priklausomybę tarp raketos lėkimo laiko ir jos aukščio virš žemės paviršiaus.
2) Braižyti grafiką mokiniai gali pagal savo žinių lygį (silpniausieji gali susidaryti lentelę). Tik atkreipkite dėmesį, kad čia jokiu būdu negalima braižyti grafiko funkcijos $f(t) = t^2 - 9t - 10$, kurią gavome spręsdami lygtį (žr. a) punktą).
3) Galima papildomai mokinių paklausti, kada raketa buvo aukščiausiame taške, kada jos aukštis virš žemės buvo 140 cm ir pan.

571. Pagal sąlygą nusibraižyti realią situaciją atitinkantį brėžinį neįmanoma, bet to ir nereikia.
Atsakymas. 2 m.

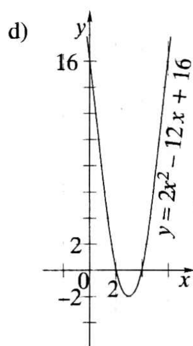




$x^2 = 2x$,
$x = 2$.

572. a) $2x^2 - 12x + 16$; b) $(x - 4)(2x - 4)$; c) 2; 4;

d)



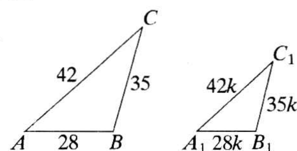
Pastaba. Mokiniai kartais klysta ir prastina dešiniąją funkcijos pusę, t. y. vietoje nurodytos funkcijos ima „suprastintą“: $y = x^2 - 6x + 8$.

e) -2; f) $x \in [2; 4]$; g) intervale [0; 3] reiškinys įgyja reikšmes nuo -2 iki 16.

573. a) $-0{,}7$; $0{,}7$; b) $-\sqrt{37}$; $\sqrt{37}$; c) $-\sqrt{3{,}2}$; $\sqrt{3{,}2}$; d) 0; 5; e) $-\frac{3}{4}$; 0; f) -5; 5.

574. A.

575.



$k = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$;
$A_1B_1 = 28 \cdot \frac{1}{7} = 4$ (cm);
$B_1C_1 = 35 \cdot \frac{1}{7} = 5$ (cm);
$A_1C_1 = 42 \cdot \frac{1}{7} = 6$ (cm).

Atsakymas. 4 cm, 5 cm, 6 cm.

576. $3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$, $2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$.
a) $16\sqrt{3}$; b) $-4\sqrt{3}$; c) 180; d) $\frac{3}{5}$; e) 408.

577. x — dalyvių skaičius, y — stalų skaičius;

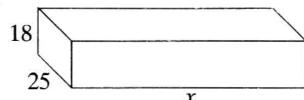
$\begin{cases} x = y + 8, \\ \frac{x}{2} = y - 7; \end{cases}$ $x = 30$, $y = 22$.

Atsakymas. 30 dalyvių, 22 stalai.

Galime spręsti ir sudarydami lygtį.

578. a) 1, 2, 4, 4, 5, 7, 7; mediana lygi 4; b) 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9; mediana lygi 6.

579.



Sijos tūris $18 \cdot 25 \cdot x = 450x$ (cm^3).
Sijos masė $450x \cdot 0{,}4 = 144\,000$,
$x = 800$ cm.

Pastaba. Kadangi sijos masė duota kilogramais, sijos matmenys — centimetrais, o tankis — gramais kubiniame centimetre, tai vienodinant matavimo vienetus patogiausia kilogramus paversti gramais.
Atsakymas. 800 cm.

5.3. Kvadratinės lygties sprendinių formulė. Diskriminantas

Sprendžiant kvadratines lygtis nepatogu kiekvieną kartą išskirti dvinario kvadratą, o pravartu naudotis formule jų sprendiniams rasti. Tai tradicinė medžiaga, todėl jos mokymas neturėtų sukelti daug problemų. Svarbiausia, kad visi mokiniai mokėtų remdamiesi diskriminantu apskaičiuoti pilnosios kvadratinės lygties sprendinius. Šiuo būdu galima rasti ir nepilnosios kvadratinės lygties sprendinius, bet tai neracionalu.

Pakartoti, kiek sprendinių gali turėti kvadratinė lygtis.

Išmokti spręsti kvadratines lygtis remiantis sprendinių formulėmis.

Šiame skyrelyje:

1. Išvedama kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) sprendinių formulė $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

   Pastabos. 1) Išvedant kvadratinės lygties sprendinių formulę greta raidinio (knygoje pateikto) išvedimo galima naudoti ir skaitinį pavyzdį.

   2) Nebūtina iš visų mokinių reikalauti mokėti išvesti formulę.

   3) Galima pasiūlyti ir kitą kvadratinės lygties sprendinių formulės išvedimą:
   Abi lygties $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, puses padauginkime iš $4a$. Turėsime:
   $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$,
   $(4a^2x^2 + 4abx + b^2) - b^2 + 4ac = 0$,
   $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$,
   $(2ax + b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 = 0$,
   $\left(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = 0$,
   $2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$
   arba $2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$,
   $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ arba $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
   Reiškinį $b^2 - 4ac$ pažymėkime D. Tuomet kvadratinės lygties sprendinius galima rasti pagal formulę $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Lygties sprendimą reikėtų pradėti nuo diskriminanto skaičiavimo, nes tuo atveju, kai $D < 0$, sprendimas būtų baigtas ir teliktų užrašyti atsakymą.
   Sprendimo eiga galėtų būti tokia:
   1) apskaičiuojame diskriminantą;
   2) jeigu $D < 0$, sprendinių nėra;
   3) jeigu $D > 0$, du skirtingi sprendiniai: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
   4) jeigu $D = 0$, vienas sprendinys (arba du lygūs sprendiniai): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

2. Algoritmu iliustruojama, kiek ir kokių sprendinių gali turėti kvadratinė lygtis priklausomai nuo diskriminanto ženklo.

   Nurodymas. Šią schemą turi įsiminti visi mokiniai.

3. Išsprendžiami trys kvadratinių lygčių pavyzdžiai, kai $D > 0$, $D = 0$ ir $D < 0$.

   Pastabos. 1) Visos pateiktos lygtys yra neredukuotos. Ir čia neverta jas užrašyti redukuotu pavidalu, nes tada koeficientas prie x ir laisvasis narys bus trupmeniniai skaičiai, o tai tik apsunkins skaičiavimus. Todėl patarkite mokiniams sprendžiant lygtį su „negražiais“ skaičiais persitvarkyti ją taip, kad koeficientai nebūtų trupmeniniai skaičiai.

   2) Pravartu įpratinti mokinius, jog jie mažesnįjį sprendinį žymėtų x_1, o didesnįjį — x_2. Tai bus patogu ateityje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 580–583, 585, 589–591 pratimai. 13–29

580. a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$; b) $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$;
c) $a = 3$, $b = -10$, $c = 3$; d) $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$.
Nurodymas. Galite pateikti daugiau tokių pratimų, ypač sunkesnių, kur koeficientai būtų „negražūs“ skaičiai, koeficientai a ir b būtų lygūs 1 arba -1, kuris nors iš koeficientų b arba c (arba abu) būtų lygus 0 .

581. a) $D = 9$, du; b) $D = 81$, du; c) $D = 0$, vienas;
d) $D = -535$, sprendinių nėra.
Nurodymas. Galite pateikti ir daugiau tokio tipo pratimų.

582. *Nurodymas.* Lentelėje nėra nė vieno pavyzdžio, kur $D = 0$, todėl vertėtų tokiais pratimais papildyti lentelę.

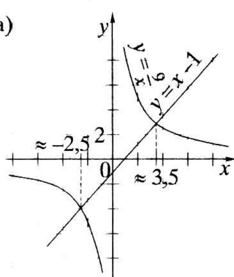
583. a) -7; -5; b) sprendinių nėra; c) $1 - \sqrt{6}$; $1 + \sqrt{6}$; d) -12; -2; e) $\frac{1}{3}$;
f) sprendinių nėra; g) -2; $-\frac{1}{2}$; h) $1\frac{1}{2}$; 3; k) -2; $-\frac{1}{2}$; l) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

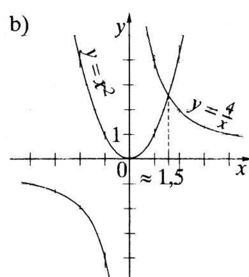
584. Nesunku apskaičiuoti, kad kai teatre visos vietos būna užimtos, tai gaunama $6 \cdot 1200 = 7200$ (Lt) pajamų. Padidinus kainą 0,5 lito bus gauta $6{,}5 \cdot 1100 = 7150$ (Lt) pajamų, dar kartą padidinus kainą — $7 \cdot 1000 = 7000$ (Lt) ir t. t. (Kiekvieną kartą padidinus kainą pajamų bus gauta vis mažiau). Vadinasi, didinti bilietų kainos neverta.
Pastabos. 1) Galima pasiūlyti mokiniams išspręsti tą patį uždavinį tik pradinę bilieto kainą 6 Lt pakeitus, pavyzdžiui, 5 Lt. Tokiu atveju didžiausios pajamos būtų 6050 Lt, kai bilieto kaina 5,5 Lt.
2) Šį uždavinį geriau spręsti išsprendus 585–592 užduotis.

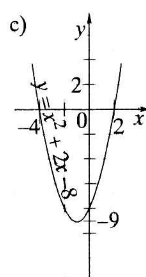
Reikėtų patikslinti uždavinio sąlygą: „...Jis spėja, kad didinant bilieto kainą *vis* 0,5 Lt netenkama *po* 100 žiūrovų...“

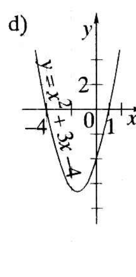
585. a) -8; 3; b) $1\frac{3}{4}$; 4; c) $\frac{1}{15}$; d) 0; 2; e) -2; 3; f) 0; 3; g) -1; 1; h) -5; 1.

586. a) -9; b) 3; 4; c) -4; 1.

587. a) 

b) 

c) 

d) 

588. a) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; b) sprendinių nėra; c) 0; d) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$;
e) sprendinių nėra; f) $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$.

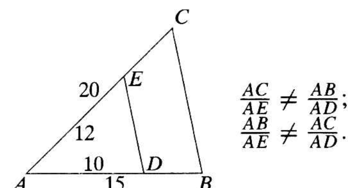
589. 12 cm ir 16 cm.

590. a) 40 m × 45 m.
b) *Nurodymas.* Reikia taisyti sąlygą taip: „Stačiakampės lentos plotas yra 5400 cm^2. Nuo jos nupjautas stačiakampio formos gabalas, kurio plotis lygus lentos pločiui, o ilgis — 1,5 m. Likusi lentos dalis sudaro kvadratą. Raskite jo plotą“.
Sprendžiame lygtį: $x^2 + 150x = 5400$, $x = 30$.
Atsakymas. 900 cm^2.

591. 26 eilės.

592. a) **C**; b) **A**.

593. Tik iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad tai lengvas uždavinys. Šiuo uždaviniu siekiama pakartoti trikampių panašumą.
Čia turime atvejį, kai dviejų trikampių kraštinės, sudarančios lygų kampą, nėra proporcingos (žr. brėž.). Bet iš to dar neišplaukia, kad trikampiai nepanašūs. Ar negali būti, kad trikampiai panašūs?
Jei jie būtų panašūs, tai $\triangle ADE$ kampas A turėtų būti lygus $\triangle ABC$ vienam iš kampų B arba C.
Jei $\angle A = \angle C$, tai $AB = BC$ ($\triangle ABC$ — lygiašonis), ir turėtume trikampį, kurio kraštinės 20, 15 ir 15. Bet tada $\triangle ADE$ irgi turėtų būti lygiašonis, t. y. 12, 10 ir 10 (atvejis 10, 12 ir 12 netinka, nes iš karto aišku, kad kraštinės nėra proporcingos).
Šiuo atveju $\frac{20}{12} \neq \frac{15}{10}$, vadinasi, trikampiai nepanašūs.
Jei $\angle A = \angle B$, tai turime trikampį 15, 20 ir 20. Tada kito trikampio kraštinės 10, 12 ir 12, bet vėl $\frac{15}{10} \neq \frac{20}{12}$.
Atsakymas. Nepanašūs.



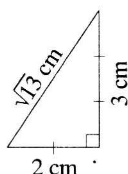
$\frac{AC}{AE} \neq \frac{AB}{AD}$; $\frac{AB}{AE} \neq \frac{AC}{AD}$.

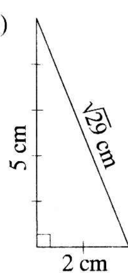
Pastaba. Žinoma, tai sunkus uždavinys, reikalaujantis mokėjimo išnagrinėti visas galimybes.

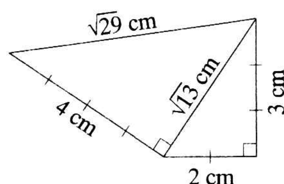
594. a) 9,5 cm; b) 34 cm.
Nurodymas. Pakartokite trikampio vidurinės linijos apibrėžimą ir savybes.

595. a) (2; 3); b) (8; 9).

597. 2,691 g.

598. a)


b)


arba


599. Aišku, kad galima sudauginti $7 \cdot 30 \cdot 12$ ir patikrinti, ar gautasis skaičius (2520) dalijasi iš duotųjų. Bet tai labai neracionalu. Kur kas paprasčiau nedauginant įsitikinti, jog sandauga $7 \cdot 30 \cdot 12$ dalijasi, pavyzdžiui, iš 9, nes $7 \cdot 30 \cdot 12 =$
$= 7 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 = 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 4$ dalijasi iš 9.
Pastaba. Skaičių *sandauga* dalijasi iš skaičiaus, jeigu bent vienas dauginamųjų dalijasi iš to skaičiaus. Skaičių *suma* dalijasi iš skaičiaus, jeigu kiekvienas dėmenų dalijasi iš to skaičiaus (bet suma gali dalytis iš skaičiaus ir tada, kai nė vienas dėmuo nesidalija).

Šio neprivalomo skyrelio tikslas — praplėsti mokinių žinias apie kvadratines lygtis ir išmokyti rasti pilnosios kvadratinės lygties sprendinius remiantis Vijeto teorema. Ši teorema patogi tuo, kad ja remiantis dažnai pavyksta kvadratinės lygties sprendinius rasti mintinai. Įsisavinus šią temą palengvėja ir kai kurių olimpiadinio tipo uždavinių sprendimas. Be to, ši medžiaga labai praverčia savikontrolei: labai paprastai galima įsitikinti, ar teisingai surasti kvadratinės lygties sprendiniai.

Šiame skyrelyje:

1. Įvedama redukuotosios kvadratinės lygties sąvoka. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog bet kurią kvadratinę lygtį galima pertvarkyti į redukuotąją.
2. Išsprendžiamas redukuotosios kvadratinės lygties (turinčios du sprendinius) pavyzdys ir pastebima, kad jos sprendinių suma lygi lygties koeficientui prie x su priešingu ženklu, o sprendinių sandauga — laisvajam nariui.

   Pastabos. 1) Galima liepti mokiniams rasti ir kitų redukuotųjų kvadratinių lygčių sprendinių sumą ir sandaugą. Stipresnieji mokiniai turi suvokti, kad iš konkrečių pavyzdžių dar negalima daryti apibendrinančių išvadų, bet suformuluoti hipotezę (teiginį) to visiškai pakanka. Suformuluoti teiginį, pavadintą Vijeto teorema, mokiniai gali ir patys. Jo įrodymas irgi yra labai lengvas, todėl tai vėl gali padaryti patys mokiniai.

   2) Vijeto teorema yra teisinga ir kai kvadratinė lygtis yra nepilnoji. Pasiūlykite mokiniams tuo įsitikinti patiems (žr. ir pastabą vadovėlyje).
3. Suformuluojama ir įrodoma teorema, atvirkštinė Vijeto teoremai.

   Nurodymas. Šią teoremą įrodyti taip pat gali patys mokiniai.
4. Nurodoma ir iliustruojama pavyzdžiais, kokio tipo uždavinius galima išspręsti taikant Vijeto ir jai atvirkštinę teoremas.

Pastabos. 1) Sudaryti redukuotąją kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų duotieji skaičiai a ir b, galima ir netaikant atvirkštinės Vijeto teoremos (žr. 1 pavyzdį), o tiesiog pasinaudojant lygios nuliui sandaugos savybe: $(x-a)(x-b)=0$, $x^2-ax-bx+ab=0$, $x^2-(a+b)x+ab=0$.
2) Ieškant kvadratinės lygties sprendinių ženklų, kai nesprendžiame pačios kvadratinės lygties (žr. 2 pavyzdį), reikia remtis Vijeto teorema. Tik reikia nepamiršti įsitikinti, ar iš viso duotoji lygtis turi sprendinių (ar $D \geqslant 0$). Čia galima būtų pastebėti, kad lygtis $x^2+px+q=0$:

- kai $q<0$ — visada turi du skirtingų ženklų sprendinius, nes $D=p^2-4q>0$; lygties sprendiniai x_1 ir x_2 yra skirtingų ženklų, nes $x_1 \cdot x_2<0$;
- kai $q>0$, tai lygtis gali turėti du sprendinius, vieną (du lygius) sprendinį arba neturėti sprendinių — tai priklauso nuo $D=p^2-4q$. Bet jei $D>0$, tai abu sprendiniai turi tą patį ženklą (juk $q>0$) ir yra teigiami, kai $p<0$, ir neigiami, kai $p>0$, — tai išplaukia iš to, kad sprendinių suma $x_1+x_2=-p$.

3) Ieškant redukuotosios kvadratinės lygties x^2+ $+px+q=0$ sprendinių netaikant sprendinių formulės tenka spręsti lygčių sistemą:
$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1 \cdot x_2=q. \end{cases}$$
Pastebėkime, kad šios sistemos antroji lygtis yra netiesinė (tokias sistemas bus mokoma spręsti 10 klasėje). Spręsdami šią sistemą vėl gauname pradinę kvadratinę lygtį:
$$\begin{cases} x_1=-p-x_2, \\ (-p-x_2)\cdot x_2=q, \end{cases} \Rightarrow \underline{x_2^2+px_2+q=0}.$$
Taigi šią sistemą išspręsti (nesprendžiant kvadratinės lygties) galima tik perrinkdami sprendinius (mintinai).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 600–610 pratimai. Visi jie skirti Vijeto bei atvirkštinei Vijeto teoremoms taikyti. 611–617 — kartojimo pratimai. 30–34

600. Šiame ir 601 uždaviniuose visos pateiktos lygtys turi po du sprendinius, todėl čia mokiniams neturėtų būti sunku nurodyti jų sumą ir sandaugą. Pirmiausia sprendžiant tokio tipo uždavinius reikia įsitikinti, ar duotoji lygtis turi sprendinių, t. y. pirmiausia reikia nustatyti diskriminanto ženklą. Siūlome pateikti mokiniams lygčių, kurios neturi sprendinių, taip pat ir nepilnųjų kvadratinių lygčių (tokių, kaip uždavinyno 33 pratimas).

Atsakymas. a) 6; 8; b) 5; 6; c) 37; 27; d) −41; −371.

601. a) 4,5; −5; b) −2,4; 1,4; c) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{8}$; d) $2\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

602. b) $D=57>0$ (lygtis turi du sprendinius). Remiantis Vijeto teorema reikia rasti du skaičius x_1 ir x_2, kad: $x_1+x_2=3$ ir $x_1 \cdot x_2=-12$. Kadangi duotos lygties sprendiniai yra iracionalieji skaičiai, tai atspėti jų beveik neįmanoma. Nepadės šiuo atveju ir sistemos $\begin{cases} x_1+x_2=3, \\ x_1 \cdot x_2=-12 \end{cases}$ sprendimas, nes ją

Šį uždavinį siūloma spręsti išsprendus 603.

spręsdami vėl gausime duotąją kvadratinę lygtį. Taigi čia Vijeto teorema negelbsti. Kad sprendinių atspėti nepavyks, galima pastebėti iš diskriminanto, nes $\sqrt{57}$ — iracionalusis skaičius. Mokytojui čia reikėtų paaiškinti mokiniams, kad ne visas lygtis pavyksta išspręsti remiantis Vijeto teorema; c) žr. b) punkto sprendimą.

Atsakymas. a) -7; 2; b) $\frac{3-\sqrt{57}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{57}}{2}$; c) $\frac{-3-\sqrt{57}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{57}}{2}$; d) 3; 4; e), f) — sprendinių nėra.

603. a) 1; 7; b) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; c) -2; $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $-1-\sqrt{3}$; $-1+\sqrt{3}$; f) $\frac{1}{5}$; 2.

604.

Kvadratinė lygtis	Redukuotoji kvadratinė lygtis	Diskriminantas	Sprendinių skaičius	Sprendiniai	
				x_1	x_2
$7x^2-14x+7=0$	$x^2-2x+1=0$	0	1	1	1
$5x^2-5x+10=0$	$x^2-x+2=0$	-7	0	—	—
$\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{6}x-\frac{4}{3}=0$	$x^2+2x-8=0$	36	2	-4	2
$-3x^2-9x+12=0$	$x^2+3x-4=0$	25	2	-4	1
$4x^2+3x-9=0$	$x^2+\frac{3}{4}x-2\frac{1}{4}=0$	$\frac{153}{16}$	2	$\frac{-3-\sqrt{153}}{8}$	$\frac{-3+\sqrt{153}}{8}$
$2x^2+5x+7=0$	$x^2+2{,}5x+3{,}5=0$	$-7{,}75$	0	—	—

605. *Nurodymas.* Reikia pataisyti sąlygą: arba išbraukti žodį *redukuotąją*, arba a), b), c) ir k) punktuose išbraukti ir $a = \ldots$.
Atsakyme pateikiame redukuotąsias kvadratines lygtis.
Atsakymas. a) $x^2+2x-3=0$; b) $x^2-x-20=0$; c) $x^2+6x+5=0$; d) $x^2+10x+24=0$; e) $x^2-6x+7=0$; f) $x^2-3=0$; g) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$; h) $x^2-7=0$; i) $x^2-4x-12=0$; j) $x^2+8x+15=0$; k) $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=0$; l) $x^2-4x+3\frac{3}{4}=0$.
Pastaba. Lygtis galima sudaryti remiantis atvirkštine Vijeto teorema arba remiantis lygios nuliui sandaugos savybe: $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

606. a) -1; 7; b) -4; 3; c) -1; 6; d) 1; 10; e) 3; 4; f) -1; 6.

607. Remdamiesi Vijeto teorema žinome, kad lygties $x^2-5x+6=0$ sprendinių suma lygi 5, o jų sandauga lygi 6. (Akivaizdu, kad abu sprendiniai teigiami skaičiai.) Padvigubinus abu sprendinius jų suma irgi padvigubės, o jų sandauga bus 4 kartus didesnė. Ieškoma redukuotoji lygtis $x^2-10x+24=0$, o apskritai — $a(x^2-10x+24)=0$, $a \neq 0$.

Atsakymas. $a(x^2-10x+24)=0$, $a \neq 0$.

Yra daug lygčių, turinčių tuos pačius sprendinius!

608. a) $x_2=-5$, $p=-2$; b) $x_2=0{,}5$, $q=6{,}25$.

609. $\begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1+x_2=12, \end{cases}$ $x_1=7$, $x_2=5$.
Atsakymas. 35.

610. A.

611. $216\,\text{cm}^2$.

612. 200 cm.

613. Sakykime, kad Domas turėjo x Lt. Tada Jonas turėjo $(x+4)$ Lt, Kostas — $\frac{x+2}{2}$ Lt, Vytas — $(x+2)\cdot 2$ Lt. Sprendžiame lygtį:
$x+(x+4)+\frac{x+2}{2}+(x+2)\cdot 2=45$, $x=8$.
Atsakymas. Domas turėjo 8 Lt, Jonas — 12 Lt, Kostas — 5 Lt, Vytas — 20 Lt.

614. a) Abiejų sistemų sprendiniai yra $x=0$, $y=1$, todėl lygtys yra ekvivalenčios;
b) pirmoji sistema turi be galo daug sprendinių, o antroji jų neturi iš viso, todėl lygtys nėra ekvivalenčios.

615. a) $y=(x+1)^2-9$; b) $y=-(x-3)^2+4$.

616. $p=4$; $q=3$.

617. 12.

5.5. Kvadratinių trinarių skaidymas dauginamaisiais

Kvadratinius trinarius skaidyti dauginamaisiais kartais tenka prastinant trupmeninius reiškinius, sprendžiant lygtis ar nelygybes. Mokiniai jau buvo mokomi skaidyti kvadratinį trinarį dauginamaisiais grupavimo būdu ir išskiriant dvinario kvadratą. Bet šie būdai nėra patogūs. Daug paprasčiau tai padaryti suradus trinario šaknis.

Pastaba. Mokiniai dažnai painioja kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendimą, kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ skaidymą dauginamaisiais ir funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko braižymą ir tyrimą. Įpratę lygtyje prastinti (dalyti ar dauginti abi puses iš kokio nors skaičiaus) tą patį daro ir su trinariu ar funkcija, ypač jei koeficientai turi bendrų daliklių arba yra trupmeniniai skaičiai.

Pakartoti:

kvadratinės lygties sprendinių sąvoką;
kvadratinės lygties sprendimą.

Išmokti:

atpažinti kvadratinius trinarius;
kvadratinio trinario šaknies apibrėžimą;
kvadratinį trinarį skaidyti dauginamaisiais pagal formulę $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 ir x_2 to trinario šaknys.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikus keletą pavyzdžių įvedama kvadratinio trinario ir jo šaknų sąvoka.

   Pastaba. Šaknies sąvoka yra labai svarbi, todėl ir vadovėlyje jai skiriama daug vietos. Reikia siekti, kad visi mokiniai suprastų ir mokėtų rasti kvadratinio trinario šaknis.

2. Formuluojama teorema, kaip žinant kvadratinio trinario šaknis jį galima išskaidyti dauginamaisiais. Teoremos įrodymas pateiktas pilkame fone, todėl jis nėra privalomas visiems mokiniams. (Be to, tos teoremos įrodymas remiasi Vijeto teorema.)

   Pastaba. Labai svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog ne kiekvienas kvadratinis trinaris turi šaknis ir ne kiekvieną trinarį galima išskaidyti dauginamaisiais. Su stipresniaisiais galima detaliau panagrinėti kvadratinį trinarį $ax^2 + bx + c$, t. y.:

   - jei kvadratinis trinaris neturi šaknų, tai jis su visomis kintamojo reikšmėmis įgyja arba tik teigiamas (kai $a > 0$), arba tik neigiamas (kai $a < 0$) reikšmes. Tai galima pailiustruoti ir grafiškai, t. y. parabolė $y = ax^2 + bx + c$ yra virš x ašies ($a > 0$, šakos aukštyn) arba žemiau x ašies ($a < 0$, šakos žemyn);
   - jei kvadratinis trinaris turi dvi skirtingas šaknis x_1 ir x_2 ($x_1 < x_2$), tai jis:
     1) kai $a > 0$, intervaluose $x \in (-\infty; x_1)$, $x \in (x_2; +\infty)$ įgyja teigiamas reikšmes, o intervale $(x_1; x_2)$ — neigiamas;
     2) kai $a < 0$, intervaluose $x \in (-\infty; x_1)$, $x \in (x_2; +\infty)$ įgyja neigiamas reikšmes, o intervale $(x_1; x_2)$ — teigiamas;
   - jei kvadratinis trinaris turi vieną šaknį (dvi lygias, kartotines šaknis), tai su visomis kintamojo reikšmėmis, išskyrus šaknį, jis yra arba teigiamas (kai $a > 0$), arba neigiamas (kai $a < 0$).

3. Išsprendžiami trys kvadratinio trinario skaidymo dauginamaisiais pavyzdžiai:

   a) kai trinaris turi *dvi skirtingas šaknis*. Tai, matyt, pats paprasčiausias atvejis. Tik svarbu, kad mokiniai mokėtų pasitikrinti, ar teisingai išskaidė. Todėl būtina atlikti klaustuku pažymėtą užduotį, t. y. mokiniai turi įsitikinti, kad atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius gaus duotąjį trinarį;

   b) kai trinaris turi *vieną šaknį*. Čia skaidant dauginamaisiais galima sakyti, kad turime dvi lygias šaknis.

   Pastaba. Labai svarbu pastebėti, kad duotąjį trinarį nesunkiai pavyksta išskaidyti dauginamaisiais remiantis formulėmis $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. Be to, čia gera proga prisiminti laipsnio apibrėžimą: $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$;

   c) kai trinaris *neturi šaknų*. Tokių trinarių išskaidyti dauginamaisiais negalima.

   Pastaba. Dažnai mokytojai į šį atvejį nekreipia dėmesio. Todėl vėliau būna sunkiau išmokyti spręsti kvadratines nelygybes.

Šiai temai skirti 618–624 pratimai; 625–639 — kartojimo pratimai. 35–37

618. a) -5; 2; b) -1; 3; c) 1; $1\frac{1}{2}$; d) -1; $\frac{3}{5}$; e) $0{,}2$; 2;
f) $\frac{-2{,}5-\sqrt{18{,}25}}{2}$; $\frac{-2{,}5+\sqrt{18{,}25}}{2}$.

619. a) $(x+6)(x-1)$; b) $(u+3)(u-5)$; c) $(t-2)^2$; d) $(y+3)^2$;
g) $(v+2+\sqrt{3})(v+2-\sqrt{3})$; h) $(y+5+2\sqrt{6})(y+5-2\sqrt{6})$;
i) $2\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$; j) $3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z-1)$; k) $-5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-1)$;
l) $-4(y+1)\left(y-\frac{3}{4}\right)$; o) $7\left(x+\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right)$; p) $9\left(v-\frac{5-\sqrt{7}}{9}\right)\left(v-\frac{5+\sqrt{7}}{9}\right)$;
r) $-11\left(u-\frac{10-\sqrt{133}}{11}\right)\left(u-\frac{10+\sqrt{133}}{11}\right)$; s) $-13\left(y-\frac{16-\sqrt{103}}{13}\right)\left(y-\frac{16+\sqrt{103}}{11}\right)$;
e), f), m), n) — išskaidyti negalima.
Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad trinario prastinti negalima, pavyzdžiui, h), e), m), n), r) ir s) punktuose negalima dalyti iš (-1). Aišku, ieškant to trinario šaknų, kai sprendžiama lygtis, prastinti galima.

620. Čia mokiniams reikia paaiškinti, kad yra nubraižytas funkcijos $y = ax^2+bx+c$ grafikas ir remiantis tuo grafiku reikia rasti trinario ax^2+bx+c šaknis. Mokiniai turi suprasti, kad to trinario šaknys yra tos x reikšmės, kuriose parabolė kerta x ašį ($y=0$). Tas reikšmes nesunku nustatyti iš grafiko. Žinant šias reikšmes (x_1 ir x_2) jau galima pasakyti, kokie tiesiniai dauginamieji įeina į trinario skaidinį, t. y. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Dabar reikia rasti koeficiento a reikšmę. Ją galima apskaičiuoti paėmus bet kurio parabolei $y = ax^2+bx+c$ priklausančio taško koordinates. Vadinasi, praktiškai reikia iš brėžinio užrašyti parabolės lygtį.

Su silpniausiais mokiniais šio uždavinio nereikėtų nagrinėti.

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$; $ax^2+bx+c = a(x-3)(x-5)$, $y = a(x-3)(x-5)$. Iš brėžinio matome, kad taškas $(4; -1)$ priklauso grafikui, todėl $-1 = a(4-3)(4-5)$, $a = 1$. Vadinasi, kvadratinio trinario skaidinys tiesiniais dauginamaisiais yra $(x-3)(x-5)$.
b) $x_1 = x_2 = 1$; $y = a(x-1)^2$. Taškas $(0; 1)$ priklauso parabolei, todėl $1 = a(0-1)^2$, $a = 1$. Gauname tokią trinario išraišką $(x-1)^2$.
c) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; $y = a(x+1)(x-3)$. Taškas $(0; 3)$ priklauso parabolei, todėl $3 = a(0+1)(0-3)$, $a = -1$. Ieškomas trinario skaidinys yra $-(x+1)(x-3)$.

Nurodymas. Ašyje Oy nenurodyta vienetinė atkarpa, todėl reikia pasakyti, kad 1 langelį atitinka 1 vienetas (o galima pasiūlyti tą uždavinį išspręsti ir laikant y ašies 1 langelį lygų, pavyzdžiui, 2 vienetams).

Šį uždavinį, matyt, geriau spręsti po 624.

621.

Kvadratinio trinario šaknys x_1; x_2	Kvadratinės lygties užrašas	
	dauginamųjų sandauga	kvadratiniu trinariu
$x_1 = 2$, $x_2 = 3$	$(x-2)(x-3) = 0$	$x^2-5x+6 = 0$
$x_1 = 1$, $x_2 = 5$	$(x-1)(x-5) = 0$	$x^2-6x+5 = 0$
$x_1 = -3$, $x_2 = 2$	$(x+3)(x-2) = 0$	$x^2+x-6 = 0$
$x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $a = 3$	$3(x+2)(x-4) = 0$	$3x^2-6x-24 = 0$
$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $a = 5$	$5(x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right) = 0$	$5x^2-7x+2 = 0$

622. a) Abu nurodyti skaičiai yra šaknys; b) -1 — nėra šaknis, 7 — yra; c) nė vienas skaičius nėra šaknis; d) abu skaičiai yra šaknys.
Nurodymas. Spręsti galima trinaryje vietoj kintamųjų įsistačius duotuosius skaičius ir tikrinti, ar gautoji reikšmė lygi nuliui; arba išsprendus atitinkamą kvadratinę lygtį pažiūrėti, ar jos sprendiniai sutampa su duotaisiais skaičiais.

623. Tokių trinarių sudaryti galima be galo daug. Paprastai mokiniai gauna trinarius, kuriuose koeficientas prie x^2 yra lygus 1. Todėl mokinių galite paklausti, ar nėra daugiau trinarių, turinčių tas pačias šaknis.
Atsakymas. a) $a(x^2-16x+28)$; b) $a\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\right)$; c) $a\left(x^2+\frac{2}{5}x\right)$; d) $a(x^2-1{,}4x)$; e) $a\left(x^2-\frac{7}{4}\right)$; f) $a\left(x^2-2\sqrt{6}x+2\right)$; čia a — bet koks skaičius, nelygus nuliui.

624. a) 2 ir 3; b) tokių taškų nėra; c) -1 ir 3; d) -2 ir 4.

625. a) -15; 1; b) -4; -3; c) $2-\sqrt{6}$; $2+\sqrt{6}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$;
f) $5-4\sqrt{3}$; $5+4\sqrt{3}$.

626. a), d), e), f) — du, c) — vieną, b) — nei vieno.

627. a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) -2; 0; c) -1; 1; d) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; e) sprendinių nėra; f) $-1\frac{1}{2}$; 0.

628. a) 5; -14; b) $\frac{7}{20}$; $-\frac{3}{10}$; c) 0; $-\frac{10}{13}$; d) $\frac{3}{5}$; 0.

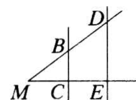
629. a) Randame m: $4^2 - 4m - 12 = 0$, $m = 1$.
Randame kitą sprendinį: $x^2 - x - 12 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.
Antrąjį lygties sprendinį galima rasti remiantis Vijeto teorema, bet galima ir paprasčiausiai išspręsti gautą kvadratinę lygtį. Todėl šį uždavinį gali spręsti ir visi mokiniai (ne tik tie, kurie moka Vijeto teoremą).
b) $a = \frac{55}{12}$, $x_2 = \frac{11}{29}$.

Šio uždavinio sprendimas neprivalomas silpnesniems mokiniams.

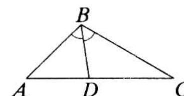
630. *I būdas.*
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1^2 - x_2^2 = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -3 - x_2, \\ (-3 - x_2)^2 - x_2^2 = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -3 - x_2, \\ x_2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_2 = 2; \end{cases}$
$x_1 \cdot x_2 = p$, $p = -10$.
II būdas.
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1^2 - x_2^2 = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 21; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 - x_2 = -7; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_2 = 2; \end{cases}$
$p = -10$.
III būdas.
$x^2 + 3x + p = 0$, $D = 9 - 4p$, $x_1 = \frac{-3-\sqrt{9-4p}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{9-4p}}{2}$.
Nagrinėjame du atvejus: 1) $x_2^2 - x_1^2 = 21$; 2) $x_1^2 - x_2^2 = 21$.
1) $\left(\frac{-3+\sqrt{9-4p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3-\sqrt{9-4p}}{2}\right)^2 = 21$, $\sqrt{9-4p} = -7$, sprendinių nėra;
2) $\left(\frac{-3-\sqrt{9-4p}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3+\sqrt{9-4p}}{2}\right)^2 = 21$, $\sqrt{9-4p} = 7$, $p = -10$.
Atsakymas. -10.

631. Žr. 630 uždavinio sprendimą.
Atsakymas. -14.

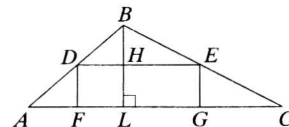
632. $MB + MD = 21$, $MD = 21 - MB$; $\frac{MD}{MB} = \frac{ME}{MC}$, $\frac{21-MB}{MB} = \frac{16}{12}$, $MB = 9$.
Atsakymas. 9 cm.



633. *Nurodymas.* Žr. 461 uždavinio nurodymą.
a) $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$;
b) $\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{2}$;
c) $AD = \frac{2}{3}DC$, $\frac{2}{3}DC + DC = 20$, $DC = 12$ cm, $AD = 8$ cm.



634. $DF = 5x$, $FG = 9x$, $BH = 16 - 5x$.
$\triangle BDE \backsim \triangle BAC$, nes $DE \parallel AC$, todėl $\frac{DE}{AC} = \frac{BH}{BL}$.
Turime $\frac{9x}{48} = \frac{16-5x}{16}$, $x = 2$.
Atsakymas. 10 cm ir 18 cm.



635. a) 1) Brėžiame 4 cm ilgio atkarpą (duotąjį statinį).
2) Iš vieno tos atkarpos galo iškeliame statmenį.
3) Iš kito tos atkarpos galo skriestuvu brėžiame apskritimo, kurio spindulys 5 cm, lankelį. Kur lankelis kerta antrame žingsnyje nubrėžtą tiesę, ten yra trečioji trikampio viršūnė.
4) Atkarpa sujungiame gautąjį tašką su laisvuoju 4 cm ilgio atkarpos galu.
b) *Nurodymas.* Reikia pasinaudoti statinio, esančio prieš 30° kampą, savybe.

636. *Nurodymas.* Patarkite nusibraižyti tieses.
Atsakymas. a) III; b) III ir IV; c) III.

637. a) 1; b) 1; c) 3; d) 1.

638. Donatas gali turėti vienos, dviejų, trijų, keturių, šešių, aštuonių, dvylikos ir dvidešimt keturių spalvų pieštukus.

639. D.

5.6. Bikvadratinės lygtys

Tai neprivalomas skyrelis, bet jo gali mokytis ir visi mokiniai, nes nėra sunkus. Šiame skyrelyje mokoma lygtis spręsti iki šiol pagrindinėje mokykloje nenagrinėtu būdu — įvedant naują nežinomąjį. Tiesa, šis būdas pagrindinėje mokykloje beveik nėra reikalingas, o vidurinėje mokykloje jį taikyti tenka gana dažnai, pavyzdžiui, sprendžiant iracionaliąsias, rodiklines, logaritmines, trigonometrines lygtis.

Pakartoti laipsnio savybę $(a^m)^n = a^{mn}$.

Išmokti:

atpažinti bikvadratines lygtis;

spręsti bikvadratines lygtis.

Šiame skyrelyje:

1. Išsprendžiamos trys bikvadratinės lygtys:
   a) turinti keturis sprendinius; b) turinti du sprendinius; c) neturinti sprendinių.

   Pastaba. Galima iškelti probleminį klausimą: ar bikvadratinė lygtis gali turėti vieną sprendinį, tris sprendinius, daugiau nei keturis sprendinius. Taip pat galima paklausti, kokiomis savybėmis pasižymi bikvadratinės lygties sprendiniai.
2. Pateikiamas bikvadratinės lygties bendrasis pavidalas $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (tik čia reikėtų pasakyti, kad $a \neq 0$) ir žodžiais nusakomas jos sprendimo algoritmas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

640–645 — teminiai uždaviniai; 646–655 — kartojimo pratimai. 38–39

640. a) -2; -1; 1; 2; b) -3; -1; 1; 3; c) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; d) -4; -3; 3; 4.

641. *Nurodymas.* Sprendžiant a) punktą gali kilti neaiškumų, nes jei bikvadratinė lygtis turi du sprendinius, tai jie turi būti vienas kitam priešingi skaičiai, jei keturis — tai turi būti dvi poros vienas kitam priešingų skaičių. Todėl sudaryti bikvadratinę lygtį, kuri turėtų tik du sprendinius 2 ir 1, neįmanoma. Jei bikvadratinė lygtis turi tuos sprendinius, tai ta lygtis turi ir priešingus sprendinius, t. y. -2 ir -1.

a) $(x^2-4)(x^2-1) = 0$, $x^4-5x^2+4 = 0$; arba $(x-2)(x-1)(x+2)(x+1) = 0$; arba sudarome kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra 2^2 ir 1^2, t. y.: $x^2 - 5x + 4 = 0$ ir vietoj x įrašome nežinomojo kvadratą, pvz., y^2: $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$, arba apskritai $a(y^4 - 5y^2 + 4) = 0$, $a \neq 0$.

b) Nesunku sudaryti nepilnąją bikvadratinę lygtį $a(x^4 - 81) = 0$, $a \neq 0$. Bet galima sudaryti ir pilnąją bikvadratinę lygtį. Samprotauti galima taip: sudarome kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų 9 ir bet koks kitas, tik būtinai neigiamas, skaičius, pavyzdžiui, -2: $x^2 - 7x - 18 = 0$. Ir vietoje x parašome y^2: $a(y^4 - 7y^2 - 18) = 0$, $a \neq 0$.

642. Čia mokiniai žinodami, kas yra kvadratinio trinario šaknis turi nesunkiai suprasti, ką vadiname bet kokio polinomo šaknimi.

a) -5; -2; 2; 5; b) -4; -1; 1; 4; c) -7; -1; 1; 7; d) -4; -3; 3; 4.

643. a) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$;

b) $(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$;

c) $(x-11)(x-2)(x+2)(x+11)$;

d) $4(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) = (x-1)(2x-1)(2x+1)(x+1)$.

644. $x^4 + px^2 + q = 0$.

Pažymėkime $x^2 = t$:

$t^2 + pt + q = 0$, $t_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}$, $t_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$;

$x_1 = -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}}$, $x_4 = \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}}$.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} + \sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} - \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} + \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} = 0$;

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2-(\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2-D}{4} = \frac{p^2-(p^2-4q)}{4} = q$.

645. a) -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; b) -3; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3; c) $x^2 + 5x = y$; -6; -4; -1; 1; d) $x^2 - 5x = y$; 1; 2; 3; 4.

Pastaba. c) ir d) punktuose lygtys nėra bikvadratinės.

646. Pavyzdžiui, $a(8x^2 - 2x - 1) = 0$, $a \neq 0$.

647. Pasakymas „nespręsdami lygties" reiškia, kad reikia išspręsti uždavinį neieškant lygties sprendinių. Kadangi duotosios lygties $D > 0$, tai ji turi du sprendinius, ir pagal Vijeto teoremą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 \cdot x_2 = 10. \end{cases}$$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7^2 - 2 \cdot 10 = 29$;

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2+x_1}{x_1x_2} = \frac{7}{10}$.

648. $x_2 = -5$; $p = -2$.

649. 1) Kinetinė energija $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

2) Potencinė energija $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

3) Tolygiai kintamai x ašies kryptimi judančio kūno:

a) koordinatė $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_xt^2}{2}$; b) poslinkio projekcija: $S = V_{0x}t + \frac{a_xt^2}{2}$.

4) Laisvai krintančio kūno koordinatė $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$.

650. *I būdas.* Sudarykime kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų p ir q:

$(x - p)(x - q) = 0, \quad x^2 + (-p - q)x + pq = 0.$

Pagal sąlygą: $\begin{cases} -p - q = p, \\ q = pq, \end{cases}$ $\begin{cases} q = -2p, \\ -2p = -2p^2. \end{cases}$

Iš antrosios lygties $p_1 = 0$ $(q_1 = 0)$; $p_2 = 1$ $(q_2 = -2)$.
Lygtis $x^2 + x - 2 = 0$ turi du sprendinius 1 ir -2.
Lygtis $x^2 + 0x + 0 = 0$, $x^2 = 0$ irgi turi du sprendinius 0 ir 0 (bet šis atvejis nelabai įdomus).

II būdas.

$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0, \\ q^2 + pq + q = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} q = -2p^2, \\ 4p^4 - 2p^3 - 2p^2 = 0, \end{cases}$

$p^2(2p^2 - p - 1) = 0$, $p_1 = 0$ $(q_1 = 0)$;

$2p^2 - p - 1 = 0$,

$p_2 = 1$ $(q_2 = -2)$,

$p_3 = -\frac{1}{2}$ $(q_3 = -\frac{1}{2})$ — pašalinis sprendinys.

III būdas. Remiantis Vijeto teorema $\begin{cases} p + q = -p, \\ p \cdot q = q, \end{cases}$ toliau kaip I būde.

Atsakymas. Gali; $p_1 = q_1 = 0$, $p_2 = 1$, $q_2 = -2$.

651. *I būdas.* $x^2 + \frac{b}{3}x + \frac{c}{3} = 0$.

Pagal Vijeto teoremą: $\begin{cases} 1 + 1 = -\frac{b}{3}, & b = -6, \\ 1 \cdot 1 = \frac{c}{3}; & c = 3. \end{cases}$

II būdas. Sudarome kvadratinę lygtį, kurios koeficientas prie x^2 būtų 3 ir kuri turėtų vienintelį sprendinį (kartotinį sprendinį), lygų 1: $3(x - 1)(x - 1) = 0$, $3x^2 - 6x + 3 = 0$.

Atsakymas. $b = -6$; $c = 3$.

652(1). *Pastaba.* Tarp pateiktų atsakymų nėra teisingo $p = -6$.
Randame c reikšmę: $5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + c = 0$, $c = -2$.
Randame antrąjį kvadratinės lygties sprendinį: $5x^2 + 3x - 2 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$.
Randame p reikšmę: $5 \cdot \frac{2}{5} + 4 = -p$, $p = -6$.

652(2). 15 dm^2. *Nurodymas.* Žr. 611 uždavinio sprendimą.

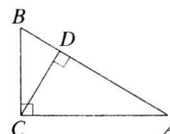
653. 80 cm.

654. 1) B_1A_1 yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl $B_1A_1 \parallel AB$ ir $B_1A_1 = \frac{AB}{2}$.

2) MN yra trikampio AOB vidurinė linija, todėl $MN \parallel AB$ ir $MN = \frac{AB}{2}$.

3) Vadinasi, $B_1A_1 \parallel MN$ ir $B_1A_1 = MN$.

655. *Pastaba.* Sąlygoje vietoj „jo statinio" turi būti „to statinio".
Duota: $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$.
Įrodyti: $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.
Įrodymas. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (pagal du lygius kampus).
Vadinasi, $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$, $AC^2 = AB \cdot AD$, $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.



6. APSKRITIMAS. SKRITULYS

Tai gana platus skyrius, apimantis visą pagrindinės mokyklos apskritimo geometriją. Apie apskritimą ir skritulį mokiniai įgijo šiek tiek žinių 5 ir 6 klasėse — buvo pateikti apskritimo ir skritulio bei apskritimo stygos, spindulio ir skersmens apibrėžimai, taip pat formulės apskritimo ilgiui ir skritulio plotui skaičiuoti. 7 klasėje buvo kalbama apie centrinį kampą. 6–9 klasėse buvo sprendžiama nemažai uždavinių, susijusių su apskritimu ir skrituliu.

Šiame skyriuje siekiama pakartoti turėtas žinias, jas praplėsti ir apibendrinti. Pagrindinis dėmesys skiriamas apskritimo ir kitų geometrinių figūrų — taško (6.1 skyrelis), tiesės (6.2 skyrelis), kampo (6.4 ir 6.5 skyreliai), daugiakampio (6.6 ir 6.7 skyreliai) — tarpusavio padėtims nagrinėti. Silpnesniems mokiniams tai gali būti sunkiai „įkandama“ medžiaga, nors vadovėlyje ji dėstoma kiek įmanoma paprasčiau, be didelių teorinių samprotavimų ir įrodymų. Todėl mokytojams, atsižvelgiant į mokinių lygį, reikėtų kelti realiai pasiekiamus tikslus.

Minimalus lygmuo:

1. Suprasti sąvokas: apskritimas, skritulys, spindulys, skersmuo, styga, liestinė, kirstinė, centrinis kampas, įbrėžtinis kampas, apibrėžtinis apskritimas, įbrėžtinis apskritimas (apibrėžtinis, įbrėžtinis daugiakampis), skritulio išpjova ir nuopjova.
2. Gebėti apskaičiuoti apskritimo ilgį ir skritulio plotą, kai žinomas spindulys (ar skersmuo), ir atvirkščiai — rasti spindulį (skersmenį), kai žinomas apskritimo ilgis ar skritulio plotas.
3. Mokėti suformuluoti apskritimo liestinės savybę ir gebėti ja remtis sprendžiant paprasčiausius uždavinius.
4. Suprasti, kas yra centrinis ir kas yra įbrėžtinis kampai, bei gebėti rasti įbrėžtinio kampo didumą, kai žinomas jį atitinkančio centrinio kampo didumas (ir atvirkščiai).
5. Suprasti, koks trikampis vadinamas įbrėžtiniu ir koks — apibrėžtiniu. Žinoti, kur yra apibrėžto apie trikampį ir kur — įbrėžto į trikampį apskritimų centrai. Suprasti, kad apibrėžtinio apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių, o įbrėžtinio — nuo trikampio kraštinių.
6. Suprasti, kokie daugiakampiai yra taisyklingi.
7. Suprasti sąvokas — skritulio išpjova, nuopjova. Mokėti apskaičiuoti skritulio išpjovos plotą ir lanko ilgį, kai žinomas skritulio spindulys ir išpjovos kampas.
8. Žinoti skaičiaus π apytikslią reikšmę dviejų ženklų po kablelio tikslumu.

Pagrindinis lygmuo:

9. Suprasti, kas yra skaičius π.
10. Mokėti užrašyti lygtį apskritimo, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia ir kai žinomas apskritimo spindulys. Mokėti nustatyti, ar taškas, kurio koordinatės žinomos, priklauso apskritimui.
11. Gebėti nusakyti apskritimo stygos ir jai statmeno skersmens (spindulio) savybę.
12. Žinoti, kiek apskritimui galima nubrėžti liestinių, einančių per šalia jo esantį tašką. Sprendžiant uždavinius mokėti remtis tų liestinių atkarpų savybe.
13. Žinoti, kad įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs.
14. Gebėti nusakyti įbrėžtinių ir apibrėžtinių keturkampių savybes ir mokėti jomis remtis sprendžiant uždavinius.
15. Gebėti apskaičiuoti įbrėžtinių (apibrėžtinių) apskritimų į (apie) taisyklinguosius daugiakampius (trikampį, keturkampį, šešiakampį) spindulius.
16. Mokėti apskaičiuoti skritulio nuopjovos plotą, kai žinomas skritulio spindulys ir nuopjovą atitinkančio centrinio kampo didumas (60°, 90° ir 120°).
17. Mokėti nustatyti tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtį.

Aukštesnis lygmuo:

18. Mokėti užrašyti lygtį apskritimo, kai žinomos apskritimo centro koordinatės ir spindulys, arba taško, priklausančio tam apskritimui koordinatės. Nustatyti bet kurio taško (kai žinomos jo koordinatės) padėtį apskritimo, duoto lygtimi, atžvilgiu.
19. Mokėti nustatyti dviejų apskritimų tarpusavio padėtį (6.3 skyrelis).
20. Suprasti, kas yra radianas. Gebėti spręsti uždavinius, kai kampai nurodyti radianais.
21. Gebėti nusakyti susikertančių stygų savybę ir mokėti ja remtis sprendžiant uždavinius.
22. Žinoti taisyklingųjų daugiakampių (trikampio, keturkampio ir šešiakampio) kraštines bei įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulius siejančias formules.

6.1. Apskritimo lygtis

Šio skyrelio teorinę medžiagą galima suskirstyti į dvi dalis: kartojimą (8 p.) ir apskritimo lygties įvedimą (9 p.). Kartojant su apskritimu ir skrituliu susijusias sąvokas ir formules reikėtų prisiminti, kas yra skaičius π — bet kokio apskritimo lanko ilgio ir apskritimo skersmens santykis.

Pakartoti:

kaip rasti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų;
tiesės lygtį (su stipresniais mokiniais);
formulę $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a \geqslant 0)$.

Išmokti užrašyti apskritimo lygtį, kai žinomos jo centro koordinatės ir spindulys.

Šiame skyrelyje:

1. Kartojamos su apskritimu ir skrituliu susijusios pagrindinės sąvokos ir formulės.

   Pastaba. Šią medžiagą turėtų mokėti visi mokiniai. Vadovėlyje nėra pateikta paprastų uždavinių, todėl, ypač silpnesniems mokiniams, galima pateikti uždavinių, kur reikėtų apskaičiuoti apskritimo ilgį ir skritulio plotą, kai žinomi spinduliai (skersmenys), ir atvirkščiai. Galima paprašyti mokinių apskaičiuoti apskritimo ilgį, kai žinomas juo apriboto skritulio plotas, ir panašiai. Tik įsitikinus, kad mokiniai moka išspręsti tokius uždavinius, galima pereiti prie apskritimo lygties nagrinėjimo.

2. Apskritimo lygtis gaunama remiantis konkrečiu pavyzdžiu. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų apskritimo lygties prasmę, t. y. jei taškas priklauso apskritimui, tai jo koordinatės tenkina to apskritimo lygtį. O pačią apskritimo lygtį galima parašyti, kai žinomos to apskritimo centro koordinatės ir spindulio ilgis.

   Pastaba. Į apskritimo lygtį $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ įeina 5 raidės, todėl mokiniams ji gali atrodyti labai sudėtinga. Todėl su silpnesniais mokiniais apie apskritimo lygtį galima pradėti kalbėti imant pavyzdžiu konkretų apskritimą, kurio centras sutampa su koordinačių pradžios tašku, o bendrosios apskritimo lygties nenagrinėti. Su pačiais silpniausiais mokiniais apskritimo lygties galima nenagrinėti iš viso.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 1–13 pratimai. Spręsdami 1–10 uždavinius pakartosite apskritimo spindulio, stygos, skersmens sąvokas, prisiminsite, kaip skaičiuojamas apskritimo ilgis bei skritulio plotas. Be to, bus proga pakartoti ir procentų radimą bei kūno masės priklausomybę nuo jo tūrio ir medžiagos tankio. Apskritimo lygčiai įtvirtinti yra 11–13 uždaviniai. 14–21 — kartojimo pratimai. 1, 2, 9

1. a) OA, OB, OM; b) AB, AC, CD; c) AB.

2. a) $C = 2\pi R = 60\pi$ (cm); b) $l = 1{,}05 \cdot 60\pi \approx 1{,}05 \cdot 188{,}4 = 197{,}82$ (cm).

3. 38,22 cm. *Nurodymas.* Kadangi 4% juostos ilgio reikia palikti apkausto sujungimui, tai statinės apkausto ilgis $C = 0{,}96 \cdot 250 = 240$ (cm).

4. a) 18,84 m; b) 6784,8 m^2; c) 1089,8 m^2.

5. 75 m. *Nurodymas.* $\frac{2}{15} S_{\text{stačiakampio}} = S_{\text{skritulio}}$.

6. a) 4,5 cm; b) $9\sqrt{3}$ cm.
Galima spręsti dvejopai.
I būdas. Randame skritulio, kurio spindulys lygus 9 cm, plotą ir remdamiesi lygybe: a) $\pi R^2 = \frac{81}{4}\pi$; b) $\pi R^2 = 3 \cdot 81\pi$, apskaičiuojame reikiamo skritulio spindulį.
II būdas. Remiamės skritulių panašumu. Panašumo koeficientas lygus: a) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; b) $\sqrt{3}$.

7. a) 18,84 m. *Nurodymas.* Raskite abiejų apskritimų ilgius. Kadangi kiekvienas diržo taškas „bėga“ tuo pačiu greičiu, kaip ir kiekvienas rato taškas, o ratas per minutę apsisuka 300 kartų, tai $\pi d \cdot 300$ — kelias, kurį nubėga kiekvienas diržo taškas per minutę. Norint gauti kelią per sekundę, gautą skaičių dar reikia padalyti iš 60. Taigi vienas taškas per sekundę „nubėga“ $\frac{1{,}2 \cdot \pi \cdot 300}{60} \approx 18{,}84$ (m).

b) Kadangi per 1 s diržo vienas taškas „nubėga“ $\frac{1{,}2\pi \cdot 300}{60} = 6\pi$ (m), tai mažesnysis ratas vieną kartą apsisuks per $\frac{0{,}8\pi}{6\pi} = \frac{2}{15}$ (s), o per 60 s apsisuks $\frac{60 \cdot 15}{2} = 450$ (kartų).

8. 4,35 t. *Nurodymas.* Apskaičiuokite tako plotą (kvadratiniais metrais) ir padauginę iš 0,05 (5 cm reikia paversti metrais, nes smėlio tankis nurodytas tonomis kubiniam metrui) rasite reikalingo smėlio tūrį (kubiniais metrais). Jį padauginę iš smėlio tankio (1,6) gausite smėlio masę. Mokiniams reikėtų priminti, kad smėlio tankis 1,6 t/m^3 reiškia, jog 1 m^3 smėlio sveria 1,6 t.

9. 1) 75 cm^2; 2) 78,75 cm^2; $\pi \approx 3,15$.

10. $10\pi \approx 31,4$. *Nurodymas.* $R = AM = 5$.

11. a) $(-5; 2)$, $R = 4$; b) apskritimui priklauso tik taškas C; c) 8π; d) 16π.

12. a) $x^2 + y^2 = (\sqrt{29})^2$;
b) taškai A ir C yra apskritimo išorėje, o taškas B — apskritime.
Nurodymas. Palyginkite atstumus AB, AC ir AD su apskritimo spindulio ilgiu. Galite paprašyti mokinių nurodyti tašką, kuris būtų to apskritimo viduje.

13. a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 10^2$;
b) taškas B yra apskritime, taškas C — apskritimo viduje, o taškas D — apskritimo išorėje.

14. a) 1,6; 2; b) $-3\frac{1}{8}$; 3; c) -2; -1; 1; 2.

15. a) $-2{,}5$; 2,5; b) $-\frac{3}{5}$; $-\frac{2}{5}$.

16. a) Pasirinkę laisvai vieno nežinomojo reikšmes ir įstatę į duotą lygtį nesunkiai rasite kito nežinomojo reikšmes;
b) visi duotosios lygties sprendiniai yra tiesėje $y = 3x - 2$;
c) $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $(0; -2)$.

17. a) 12 cm, 21 cm, 30 cm; b) 6 cm, 10,5 cm, 15 cm.

18. a) (6; 12); b) (1; 0).

19. $\begin{cases} x = 12y + 9, \\ x = 15y, \end{cases}$ $x = 45$.
Nurodymas. Čia galima pasiaiškinti, kokios gali būti liekanos dalijant natūralųjį skaičių n iš natūraliojo skaičiaus m. Iš viso galima gauti m liekanų, t. y. 0, 1, 2, ..., $m - 1$; kai pasakyta, kad skaičius n nesidalija iš m, gauname $m - 1$ liekaną, t. y. 1, 2, 3, ..., $m - 1$. Skaičiaus n dalybos iš m rezultatą, kai sveikoji dalis yra x, o liekana y, galima užrašyti taip: $n = x \cdot m + y$.
Pavyzdžiui, 22 dalybos iš 7 su liekana rezultatą galima užrašyti taip: $22 = 3 \cdot 7 + 1$.

20. C.

21. *I būdas.* Per 1 minutę vienas dviratininkas nuvažiuoja $\frac{1}{12}$ trasos rato, o kitas — $\frac{1}{15}$ trasos rato. Vienas dviratininkas per 1 min. prisiveja kitą dviratininką $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$ (trasos) rato ilgiu, todėl aplenks kitą dviratininką vienu ratu po $1 : \frac{1}{60} = 60$ (min.) nuo starto, t. y. po 1 valandos.
II būdas. $15n = 12(n + 1)$, $n = 4$; čia n — trasos ratai.
Atsakymas. a) Po 1 h; b) 5; 4.

6.2. Apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis

Šiame skyrelyje nagrinėjamos apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtys:

1) tiesė kerta apskritimą (turi du bendrus taškus);
2) tiesė liečia apskritimą (turi vieną bendrą tašką);
3) tiesė yra šalia apskritimo (neturi bendrų taškų).

Trečiasis atvejis yra mažiausiai įdomus. Pagrindinis dėmesys skiriamas apskritimo liestinei ir kirstinei bei jų savybėms.

Pakartoti:

kas yra atstumas nuo taško iki tiesės;
Pitagoro teoremą.

Išmokti:

ką vadiname apskritimo liestine ir ką — kirstine;
stygos savybę;
liestinės savybę;
liestinių, išeinančių iš vieno taško, savybę;
naudojantis matlankiu arba kampainiu nubraižyti apskritimo liestinę.

Šiame skyrelyje:

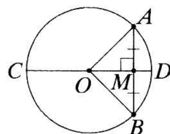
1. Brėžinyje parodomos trys skirtingos apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtys ir apibrėžiama, kas yra apskritimo liestinė ir kas — kirstinė. Tai labai svarbios sąvokos, todėl reikia, kad visi mokiniai atpažintų apskritimo liestinę ir kirstinę bei mokėtų jas nubraižyti.
2. Kiekvienu atveju palyginamas atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės su apskritimo spinduliu. Tai nėra labai svarbi medžiaga, todėl jos galite ir nenagrinėti, nors nieko sunkaus čia nėra.
3. Atskirai nagrinėjamas atvejis, kai tiesė kerta apskritimą. Tik patogumo dėlei imama tiesės dalis (atkarpa), esanti apskritimo viduje (styga).

   Apskritimo stygos savybę:

   > *Stygai statmenas apskritimo skersmuo (spindulys) dalija ją pusiau*

   siūloma „atrasti" patiems mokiniams atliekant 1 užduotį.

   Įrodant šią savybę reikia pastebėti, kad trikampis AOB yra lygiašonis ($OA = OB$), o OM — jo aukštinė.

   Lygiašoniame trikampyje aukštinė, išvesta į trikampio pagrindą, yra ir jo pusiaukraštinė. Todėl $AM = MB$.

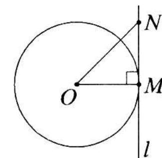
   Pastaba. Skritulio nuopjova atskirai bus nagrinėjama 9 skyrelyje, bet pačią sąvoką galima įvesti dabar.
4. Nagrinėjamas atvejis, kai tiesė liečia apskritimą.

   Apskritimo liestinės savybę:

   > *Apskritimo liestinė yra statmena spinduliui (skersmeniui), nubrėžtam į lietimosi tašką*

   taip pat siūloma įrodyti patiems mokiniams atliekant 2 užduotį.

   Pateikiame šio teiginio įrodymą.

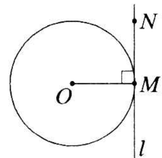
   Duota: apskritimas, kurio centras O, ir liestinė l, liečianti apskritimą taške M.
   Įrodyti: $OM \perp l$.
   Įrodymas. OM — apskritimo spindulys. Pasirinkime bet kurį tiesės l tašką N, nesutampantį su tašku M. Kadangi tiesė l yra apskritimo liestinė, tai taškas N nepriklauso apskritimui (visi tiesės l taškai yra apskritimo išorėje), todėl $ON > OM$. Vadinasi, OM — mažiausias iš visų atstumų nuo taško O iki tiesės l taškų. Todėl $OM \perp l$.

   Nurodymas. Apskritimo liestinės savybę turi žinoti visi mokiniai. Dauguma turėtų žinoti ir kirstinės (stygos) savybę. Įrodymų galite ir nereikalauti, nors jie ir nėra sudėtingi.

   Toliau vadovėlyje esančios teorinės medžiagos su silpnesniais mokiniais galite ir nenagrinėti.
5. Matyt, tik nedaugelis mokinių sugebėtų suformuluoti teiginį, atvirkštinį apskritimo liestinės savybei:

   > *Tiesė, einanti per apskritimo spindulio galą, priklausantį apskritimui, ir statmena tam spinduliui, yra apskritimo liestinė.*

   Todėl čia yra gera proga „patreniruoti" būsimuosius matematikus. Pateikiame šio teiginio įrodymą.

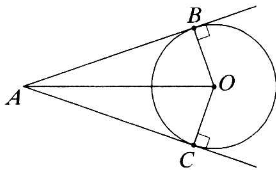
   Duota: apskritimas, kurio centras O ir spindulys OM, $l \perp OM$.
   Įrodyti: l — liestinė.
   Įrodymas. Kadangi $OM \perp l$, tai OM yra pats trumpiausias iš visų atstumų nuo taško O iki tiesės l taškų.
   Vadinasi, bet kurio tiesės taško N, skirtingo nuo M, atstumas $ON > OM$. Taigi visi tiesės l taškai, skirtingi nuo M, yra apskritimo išorėje. Tiesė l su apskritimu turi tik vieną bendrą tašką, todėl ji yra apskritimo liestinė.

   Pastaba. Aišku, remdamiesi šiuo teiginiu bet kuris mokinys nesunkiai turi sugebėti nubrėžti apskritimui liestinę (bet kuriame jo taške) naudodamasis kampainiu arba matlankiu.
6. Teigiama, kad per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti dvi liestines. Tai akivaizdus faktas, todėl to galima klausti net silpniausių mokinių — jie turėtų nesunkiai atsakyti.

7. Atliekant 3 užduotį siūloma įsitikinti, kad

> *Apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra lygios*

Įrodysime, kad $\triangle AOB = \triangle AOC$.



AO — kampo BAC pusiaukampinė ($OB \perp AB$, $OC \perp AC$ ir $OB = OC$). Todėl $\angle BAO = \angle OAC$. Taigi nagrinėjamų trikampių atitinkami kampai yra lygūs. Kraštinė OA yra bendra, todėl šie trikampiai lygūs (pagal kraštinę ir du lygius kampus prie jos). Vadinasi, $AB = AC$.

Pastaba. Trečia užduotimi, galima sakyti, pradedame nagrinėti atskiras apskritimo ir kampo tarpusavio padėtis (4 skyrelyje bus nagrinėjamas atvejis, kai kampo viršūnė yra apskritimo centre, o 5 skyrelyje — kai kampo viršūnė yra apskritime, o kampo kraštinės kerta tą apskritimą).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 22–35 ir 37 pratimai; kartojimo 36 ir 38–45.

3, 7, 8, 10, 11, 22–25, 31, 35

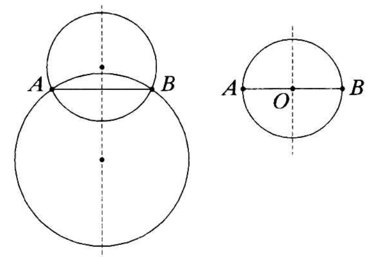
22. a) $d > R$ — tiesė ir apskritimas neturi bendrų taškų;
b) $d < R$ — tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose;
c) $d = R$ — tiesė liečia apskritimą.

23. a) Liestinės yra lygiagrečios, nes jos statmenos skersmeniui (skersmuo kerta dvi tieses ir susidariusių vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°);
b) liestinės susikerta (kampas tarp liestinės ir stygos, neinančios per apskritimo centrą, nėra status).

24. a) 5 cm; b) 15 cm; c) 25 cm.

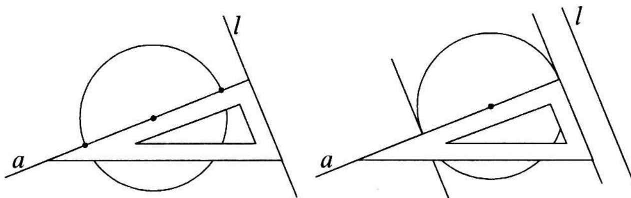
25. a) Taip, nes $OA^2 = OB^2 + AB^2$, vadinasi, $\angle OBA = 90°$;
b) ne, nes $OB^2 + AB^2 = 180$, o $OA^2 = 169$, t. y. $OB^2 + AB^2 \neq OA^2$ ir $\angle OBA \neq 90°$.

26. 3) Apskritimų centrai priklauso atkarpos AB vidurio statmeniui.
4) Apskritimo, kurio centras — atkarpos AB vidurio taškas, spindulys bus mažiausias ir lygus 3 cm.



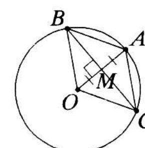
27. a) Pridėję kampainį taip, kad viena jo kraštinė būtų tiesėje l, o kita eitų per apskritimo centrą, brėžiame tiesę a, einančią per apskritimo centrą. Ji apskritimą kerta dviejuose taškuose. Per šiuos taškus su kampainiu brėžiame dvi tieses (liestines), statmenas tiesei a. Jos yra lygiagrečios tiesei l.

Mokiniai turi pastebėti, kad kiekvienu atveju galima nubrėžti dvi norimas liestines.



b) Kaip ir pirmuoju atveju per apskritimo centrą brėžiame tiesę a, lygiagrečią tiesei l. Ši tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose. Per šiuos taškus nubrėžtos liestinės yra statmenos tiesei l.

28. Kadangi $AO \perp BC$, tai spindulys AO stygą BC dalija pusiau, t. y. $BM = MC$. Remiantis trikampių lygumu nesunku įsitikinti, kad keturkampio $OBAC$ visos kraštinės lygios. Toks keturkampis yra rombas.



29. a) 135°; b) 45°.

30. 59°.

31. $AB = 4$ cm, $OA = 5$ cm.

32. $AB = AC$ (apskritimo, kurio centras O_1, liestinių, išvestų iš taško A, atkarpos), $AC = AD$ (apskritimo, kurio centras O_2, liestinių, išvestų iš taško A, atkarpos), $AD = AE$ (apskritimo, kurio centras O_3, liestinių, išvestų iš taško A, atkarpos). Iš gautų lygybių išplaukia, kad $AB = AC = AD = AE$, t. y. taškai B, C, D ir E yra vienodai nutolę nuo taško A. Vadinasi, tie taškai priklauso apskritimui, kurio centras A.

33. 4,5 cm.

34. a) Stačioji trapecija, nes $AD \parallel BE$ ir $AD \perp AB$, $BE \perp AB$;
b) $\triangle AOD$, $\triangle ODC$, $\triangle OCE$, $\triangle OEB$ — statieji; $\triangle AOC$, $\triangle ADC$, $\triangle OCB$, $\triangle CEB$ — lygiašoniai.

35. a) 8; b) 2; c) $AB = 6$ m; $OD = 4$ m.

36. 5 cm. *Nurodymas.* $OM = R = FE$. (Stačiakampio įstrižainės yra lygios.)

Skaitant sąlygą gali pasirodyti, kad uždavinys sunkus, bet iš tikrųjų net per lengvas...

37. Nubrėžę apskritimą ir tieses matysite, kad:
a) tiesė kerta apskritimą taškuose (5; 0) ir (0; −5);
b) tiesė yra šalia apskritimo;
c) tiesė liečia apskritimą taške (−3; 4).
Nurodymas. Stipresnieji mokiniai gali pamėginti spręsti lygčių sistemą, kurios viena lygtis — netiesinė. Tokios sistemos bus sprendžiamos 10 klasėje.

38. a) −6; 6; b) 0; 36; c) −20; 20.

39. a) $(x-7)(x-5)$; b) $(a-1)(2a-3)$.

40. a) $a(x^2 - 4x - 60) = 0$, $a \neq 0$; b) $a\left(x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{7}{6}\right) = 0$, $a \neq 0$.

41. Sakykime, kad tie skaičiai yra x ir y. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 10, \\ \sqrt{xy} = 8. \end{cases}$$
Šioje lygčių sistemoje antroji lygtis yra netiesinė. Tokias lygčių sistemas mokysimės spręsti tik 10 klasėje. Tačiau stipresniems mokiniams galima ir dabar paaiškinti gautos sistemos sprendimą. Antrosios lygties abi puses pakėlę kvadratu ir įstatę į ją išreikštą vieną nežinomąjį iš pirmos lygties gausime kvadratinę lygtį.
Beje, sprendinį galima rasti ir spėjant (ar remiantis Vijeto teorema).
Atsakymas. 4 ir 16.

42. 22 cm.
Nurodymas. Reikia remtis $\triangle NBC$ ir $\triangle NDE$ panašumu.

43. Vienam puodui pagaminti reikia 1,5 kg ketaus, o vienam katilui — 12 kg ketaus.

44. *Nurodymas.* Kadangi abiejuose punktuose reikia braižyti hiperbolę $y = \frac{8}{x}$, tai galima abu punktus atlikti viename brėžinyje.
Atsakymas. a) 2; b) 2; 4.

45. Nelygybę tenkina 158 neigiamos sveikosios y reikšmės, skaičius 0 ir 25 teigiamos sveikosios y reikšmės.
Atsakymas. **D**.

6.3. Dviejų apskritimų tarpusavio padėtis

Nors skyrelis ir neprivalomas, tačiau dviejų apskritimų tarpusavio padėtis galima pailiustruoti ir visiems mokiniams. Likusią skyrelio medžiagą siūlome nagrinėti tik su būsimais realinės pakraipos mokiniais.

Skyrelyje įvedama dviejų apskritimų bendrosios liestinės sąvoka.

Pakartoti, kaip per duotąjį tašką nubrėžti tiesę, lygiagrečią duotajai.

Išmokti:

pavaizduoti apskritimus, kai jie kertasi, liečiasi arba neturi bendrų taškų (visiems mokiniams);

susikertančių apskritimų bendrosios stygos savybę;

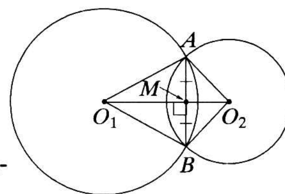
kas yra dviejų apskritimų bendroji liestinė.

Šiame skyrelyje:

1. Brėžinyje parodomos dviejų apskritimų tarpusavio padėtys.
2. Palyginamas atstumas tarp dviejų apskritimų centrų ir jų spindulių sumos, kai apskritimai kertasi, liečiasi iš išorės arba yra vienas kito išorėje.

   Pastaba. Kai apskritimai liečiasi iš vidaus, atstumas tarp jų centrų $d = R - r$ (tuo mokiniai įsitikins atlikę 1 užduotį).
3. Dviejų susikertančių apskritimų bendrosios stygos savybę siūloma įrodyti patiems mokiniams atliekant 2 užduotį.

   Įrodysime 2 užduoties 3) punktą, t. y. įrodysime, kad $O_1O_2 \perp AB$ ir $AM = MB$. $\triangle AO_1B$ ir $\triangle AO_2B$ yra lygiašoniai, turintys bendrą pagrindą AB.



   Sakykime, kad M_1 — stygos AB vidurio taškas. Įrodysime, kad $M_1 = M$. Kadangi O_1M_1 — trikampio AO_1B pusiaukraštinė, tai ji yra ir šio trikampio aukštinė. Taigi $O_1M_1 \perp AB$. Analogiškai įsitikiname, kad $O_2M_1 \perp AB$. Iš čia išplaukia, kad $\angle O_1M_1O_2$ — ištiestinis, t. y. taškas M_1 priklauso atkarpai O_1O_2. Vadinasi, $M_1 = M$. Taigi įrodėme, kad $O_1O_2 \perp AB$ ir $AM = MB$.
4. Paaiškinta, kas yra dviejų apskritimų bendroji liestinė, ir parodytos dviejų apskritimų bendrųjų liestinių galimos padėtys.

Pastaba. Čia liestinės neskirstomos į dviejų apskritimų išorines ir vidaus liestines. Uždaviniuose liestinės yra nubrėžtos. Kaip dviem apskritimams nubrėžti bendrąją liestinę, sužinosime 5 skyrelyje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

36–42

46–51 — teminiai pratimai; 52–59 — kartojimo.

46. a) 13; b) 3.

47. *Nurodymas.* Liestinių atkarpų AB ir CD susikirtimo tašką pažymėkite raide. Remkitės liestinių, nubrėžtų apskritimams iš vieno taško, atkarpų lygybe.

48. a) $8\sqrt{3}$ cm. *Nurodymas.* Iš taško O_2 nubrėžkite tiesę, lygiagrečią liestinei AB. Jos susikirtimo tašką su spinduliu O_1A pažymėkite raide C. Tuomet $O_2C = AB$. Nagrinėkite statųjį trikampį O_2CO_1.
b) 13 cm. (Žr. punkto a) nurodymą.)
Pastaba. Sprendžiant uždavinius su bendrąja dviejų apskritimų liestine, nesusipratimų būna net vyresnėse klasėse. Mokiniai dažnai neteisingai įsivaizduoja stačiuosius trapecijos kampus. Jie mano, kad statieji kampai yra prie viršūnių O_1 ir O_2. Todėl šį uždavinį išnagrinėkite labai atidžiai.

49. Pažymėkime $SM = x$. Iš trikampių ATS ir BTM panašumo gauname:
$\frac{TM}{TS} = \frac{BM}{AS}$, t. y. $\frac{150\,000\,000 - x}{150\,000\,000} = \frac{1738}{696\,000}$, $x = 149\,625\,431$ km.
Atsakymas. 149 625 431 km.

50. $4{,}8 + 1{,}2\pi \approx 8{,}57$ (m).

51. 1) a) $R_1 = 2$, $R_2 = 1$, $O_1(0; 0)$, $O_2(-3; 4)$, $O_1O_2 = 5$; b) $R_1 = 3$, $R_2 = 2$, $O_1(0; 0)$, $O_2(-3; 4)$, $O_1O_2 = 5$;
c) $R_1 = 7$, $R_2 = 5$, $O_1(2; -3)$, $O_2(-4; 5)$, $O_1O_2 = 10$.
2) a) apskritimai nesikerta; b) apskritimai liečiasi taške ($\approx -1{,}8$; $\approx 2{,}4$);
c) apskritimai kertasi taškuose ($\approx -4{,}3$; $\approx 0{,}1$); ($\approx 0{,}8$; $\approx 3{,}8$).

52. a) -3; 5; b) -7; -4.

53. $t = -5$ ir $t = -1$.

54. 12 cm. *Nurodymas.* Nagrinėkite panašiuosius trikampius AMB ir DMC.

55. a) 36 cm; 39 cm; b) $13\frac{11}{13}$ cm; c) $11\frac{8}{17}$ cm; $27\frac{9}{17}$ cm; d) $5\frac{10}{13}$ cm; $33\frac{3}{13}$ cm.

56. a) $y = -x + 3$; b) $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$.

57. a) $a^2(a+1)$; b) $a^2(a-1)$; c) a^5; d) a; e) $a^4(a+1)^2$; f) a^{10}.
Pastaba. a), b) ir e) punktuose pateiktas išraiškas vargu ar galima laikyti „suprastinimu“.

58. Kadangi vienuolikos aikštės žaidėjų amžiaus vidurkis yra 22 metai, tai jų amžiaus suma yra $11 \cdot 22 = 242$. Kadangi dešimties žaidėjų amžiaus vidurkis yra 21 metai, tai jų amžiaus suma yra $21 \cdot 10 = 210$.
Atsakymas. 32 metai.

59. Po 100 parų bus taip pat 12 val., o dar po 10 val. bus $12 + 10 = 22$ val., t. y. dešimta valanda vakaro.
Kas 7 paros yra trečiadienis. Vadinasi, po 100 parų bus savaitės diena, kurią gausime prie trečiadienio pridėję 100 dalybos iš 7 liekaną. Kadangi $100 : 7 = 14 \cdot 7 + 2$, tai pridėti reikia 2 dienas, taigi bus penktadienis.
Atsakymas. **D**.

6.4. Centriniai kampai

Centrinio kampo sąvoka buvo įvesta 7 klasėje. Šiame skyrelyje įvedamas laipsninis lanko matas — lankui priskiriame tiek laipsnių, kiek jų turi jį atitinkantis centrinis kampas.

Pakartoti:

apskritimo ilgio formulę;
kam lygus pilnutinio kampo didumas laipsniais.

Išmokti nurodyti lanko didumą jį atitinkančio centrinio kampo didumu (laipsniais).

Šiame skyrelyje:

1. Primenama, ką vadiname centriniu kampu.

   Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog centrinis kampas padalija apskritimą į du lankus. Kuo didesnis centrinis kampas, tuo didesnį lanką jis atitinka. Kadangi kampai paprastai matuojami laipsniais, tai ir centrinį kampą atitinkantį lanką kartais patogu matuoti laipsniais.

   Pastaba. Galite pastebėti, kad yra be galo daug lankų, kurių didumas, pavyzdžiui, lygus 65°. Todėl laipsniais matuoti apskritimo lankus ne visada būna patogu. Aišku, kai žinomas apskritimo spindulys ir apskritimo lanką atitinkančio centrinio kampo didumas α, tai iš proporcijos

   $$\begin{aligned} 2\pi R &— 360°, \\ l &— \alpha \end{aligned}$$

   nesunkiai gauname to lanko didumą (ilgio vienetais): $l = \frac{2\pi R}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$. Tokio tipo uždavinius turėtų mokėti spręsti dauguma mokinių.

2. Stipresniems mokiniams įvedama radiano sąvoka pastebint, kad kartais patogu centrinį kampą, kai žinomas jį atitinkančio lanko didumas (santykiniais vienetais, išreiškiančiais viso apskritimo dalį, kurią sudaro lankas), matuoti to lanko didumu, t. y. ilgio vienetais. Pilkame fone pateikti samprotavimai turėtų būti nagrinėjami su mokiniais, kurie planuoja pasirinkti realinį profilį.

   Pastaba. Skritulio išpjova atskirai bus nagrinėjama 9 skyrelyje, bet šią sąvoką galima apibrėžti ir šiame skyrelyje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

60–67 — teminiai uždaviniai; 68–79 — kartojimo pratimai. 4

60. a), b) ir c) punktais yra du tokie apskritimo taškai, o d) punkte — vienas.

61. 150°. *Nurodymas.* $\smile AMB = 5x$, $\smile ANB = 7x$, $5x + 7x = 360$.

62. $\smile AB = 2\pi$ cm ($\approx 6{,}28$ cm).

63. $l = \frac{\pi \cdot 0{,}5}{180} \cdot 36 = \frac{\pi}{10}$ (m) ($\approx 0{,}31$ m).

64. *I būdas.* Apskritimo, kurio spindulys lygus $4R$, ilgis $C = 2\pi \cdot 4R = 8\pi R$. Raskime, kurią apskritimo dalį sudaro lankas, kurio ilgis yra $2\pi R$:

$$\frac{2\pi R}{8\pi R} = \frac{1}{4}; \quad 360° \cdot \frac{1}{4} = 90°.$$

II būdas. Taikome formulę $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$. Turėsime: $2\pi R = \frac{\pi \cdot 4R}{180} \cdot \alpha$ ir $\alpha = \frac{2\pi R \cdot 180}{4\pi R} = 90°$.

Atsakymas. 90°.

65. a) $l = \frac{\pi \cdot 5}{180} \cdot 36 = \pi$ (cm) ($\approx 3{,}14$ cm).
b) $C = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \approx 62{,}8$ (cm). Sudarome proporciją:

$$\left.\begin{aligned} 62{,}8\,\text{cm} &— 360°, \\ 6{,}28\,\text{cm} &— x°; \end{aligned}\right. \Rightarrow x = 36°.$$

66. Sudarome proporciją:

$$\left.\begin{aligned} 180° &— \pi \text{ radianų}, \\ 72° &— x \text{ radianų}; \end{aligned}\right. \Rightarrow x = 0{,}4\pi \text{ (rad)} \approx 1{,}26 \text{ (rad)}.$$

67. $\approx 69°$.

68. a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, t. y. $a = bk$, $c = dk$.
Tuomet $\frac{a+b}{b} = \frac{bk+b}{b} = k + 1$, $\frac{c+d}{d} = \frac{dk+d}{d} = k + 1$.
Taigi $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
Analogiškai įrodomos b) ir c) punktų lygybės.

69. b) Sakykime, kad $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Tuomet $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$. Pasinaudoję 68 uždavinio a) punkto lygybe, gauname: $\frac{AM+MB}{AM} = \frac{AN+NC}{AN}$, t. y. $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ arba $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Pagal atvirkštinę Talio teoremą $MN \parallel BC$.

70. 1. Lankydamas kino seansus be abonemento Marius išleistų $10 \cdot 9 = 90$ (Lt), o su abonementu — $80 + 5 \cdot 10 = 130$ (Lt). Taigi Mariui šiuo atveju pirkti abonementą nenaudinga.
2. a) $9x$ Lt; b) $(80 + 5x)$ Lt.
3. Tiesių $y = 9x$ ir $y = 5x + 80$ susikirtimo taško koordinatės yra (20; 180).
4. Kino seansų skaičius turi būti didesnis už 20.
5. a) Nenaudinga, nes $22 \cdot 9 = 198 < 200$ ir $5 \cdot 22 + 80 = 190 < 200$;
b) kino seansų skaičius turi būti didesnis už 24.

71. Sakykime, kad prekė kainavo A Lt. Uždėjus 30% antkainį ji kainuoja $1{,}3A$ Lt.
a) Suteikus 10% nuolaidą prekė kainuos $1{,}3A - \frac{1{,}3A \cdot 10}{100} = 1{,}17A$ (Lt) (arba $1{,}3A \cdot 0{,}9 = 1{,}17A$). Taigi prekės antkainis sudarė 17%.
b) Suteikus 15% nuolaidą prekė kainuos $1{,}3A - \frac{1{,}3A \cdot 15}{100} = 1{,}105A$ (Lt) (arba $1{,}3A \cdot 0{,}85 = 1{,}105A$). Taigi prekės antkainis sudarė 10,5%.

Atsakymas. a) 17%; b) 10,5%.

72. Primename, jei pajamų ir išlaidų skirtumas teigiamas — gaunama pelno, jei neigiamas – patiriamas nuostolis.

Atsakymas. a) 8050 Lt; b) 8350 Lt.

73. Sakykime, kad pėstysis ėjo x km/h greičiu. Per 1 h dviratininkas prisiveja pėstįjį $(14{,}3 - x)$ km. 5,05 km atstumą dviratininkas įveiks, t. y. pavys pėstįjį, per $\frac{5{,}05}{14{,}3-x}$ h.
Taigi: a) $\frac{5{,}05}{14{,}3-x} = \frac{1}{2}$, $x = 4{,}2$; b) $\frac{5{,}05}{14{,}3-x} = \frac{5}{12}$, $x = 2{,}18$.
Atsakymas. a) 4,2 km/h; b) 2,18 km/h.

74. Sakykime, kad skautai iš pradžių ėjo x km/h greičiu, o po to $(x - 0{,}5)$ km/h vidutiniu greičiu. Atstumas nuo Šakių iki Kriūkų yra 6 km. Dienos maršruto dalies nuo Šakių iki Kriūkų ilgis $2x + 4{,}5(x - 0{,}5)$ km. Todėl pagal sąlygą: $2x + 4{,}5(x - 0{,}5) = 6x$, $x = 4{,}5$.
Atsakymas. 4,5 km/h.

75. Jeigu $y_1 = -0{,}82$, tai $a = 1 - (0{,}82)^2 = 0{,}3276$.

Galite paprašyti nurodyti ir kitą tos lygties sprendinį.

76. *Nurodymas.* Silpnesni moksleiviai šį pratimą gali spręsti su skaičiuokliu. Stipresnieji turėtų įkelti bendrąjį dauginamąjį po šaknies ženklu ir tada nustatyti, kuris iš duotųjų skaičių yra tarp skaičių 5 ir 6.
Atsakymas. **D**.

77. a) MCCCXCVII; b) MDXLVII; c) MDLXXIX; d) MCMXC.

78. a) 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{16}$;
b) 1) $b = -2{,}5$; $c = -1{,}5$; 2) $b = -3{,}5$; $c = 4$;
c) 1) $b = 4$; $c = 5$; 2) $b = 2$; $c = -2$.

79. $-1{,}5$.

6.5. Įbrėžtiniai kampai

Šiame skyrelyje nagrinėjami kampai, kurių viršūnės yra apskritimo taškai, o kraštinės kerta tą apskritimą. Svarbiausia, kad mokiniai žinotų ryšį tarp įbrėžtinio ir centrinio kampų, atitinkančių tą patį lanką, didumų.

Pakartoti:
kas yra centrinis kampas;
kas yra apskritimo skersmuo;
kam lygus ištiestinio kampo didumas.

Išmokti:
kas yra įbrėžtinis kampas;
kad įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo;
įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką, savybę;
įbrėžtinių kampų, besiremiančių į skersmenį, savybę;
susikertančių dviejų apskritimo stygų atkarpų sandaugos savybę (stipresniems mokiniams).

Šiame skyrelyje:

1. Apibrėžiamas įbrėžtinis kampas.

   Pastaba. Tai svarbi sąvoka. Ar ją mokiniai gerai suprato, įsitikinsite spręsdami 80 pratimą.

2. Atliekant 1 užduotį (matuojant) įsitikinama, kad

   Įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo.

   Pastaba. Silpnesniems mokiniams galima pasiūlyti nusibraižyti keletą nevienodo didumo įbrėžtinių kampų ir matuojant įsitikinti šio teiginio teisingumu. Su stipresniais mokiniais vertėtų panagrinėti šios savybės įrodymą, pateiktą pilkame fone.

3. Kad įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs, silpnesni mokiniai įsitikinti gali matuodami. Atsakyti į klausimą „Kodėl taip yra..." turėtų sugebėti visi mokiniai.

4. 2 užduotis mokiniams taip pat turėtų būti nesunkiai įveikiama. Čia, aišku, silpnesni mokiniai vėl gali matuoti. Atlikus šią užduotį vertėtų suformuluoti savybę:

   Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į skersmenį, yra statūs.

5. Skyrelio teorinės dalies pabaigoje pilkame fone pateikiama susikertančių stygų atkarpų sandaugos teorema.

   Jeigu dvi apskritimo stygos susikerta, tai vienos stygos atkarpų ilgių sandauga lygi kitos stygos atkarpų ilgių sandaugai.

Teoremos įrodymas yra nesudėtingas, bet įrodant reikia remtis net trimis faktais:

— įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką, lygybe;

— kryžminių kampų lygybe;

— trikampių panašumo požymiu pagal du kampus.

Pastaba. Uždavinyne yra 32 uždavinys (6 skyrius), kuriame reikia apskaičiuoti didumą kampo, kurio viršūnė yra apskritimo viduje (apskritimo išorėje), o kraštinės kerta apskritimą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visi teminiai pratimai (80–94, 96) skirti įbrėžtinio kampo sąvokai įtvirtinti bei jo savybėms nagrinėti. Likę uždaviniai yra kartojimo (95, 97–102).

5, 6, 12–21, 26–30, 32–34, 49

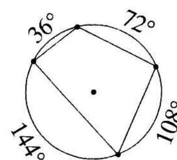
80. C.

81. a) 31°; b) 28°; c) 45°; d) 58°.

82. a) Ne; b) taip; c) ne.

83. a) 60°; b) 65°; c) 58°.

84. a) 30°, 60°, 90°; b) 54°, 90°, 126°, 90°. *Nurodymas.* Apskritimas keturiais taškais padalytas į 4 lankus, kurių laipsniniai didumai yra 36°, 72°, 108°, 144°. Dabar jau nesunku rasti įbrėžto daugiakampio kampus.



85. $\angle AMD = \angle BMC = 45°$, $\angle AMB = \angle DMC = 90°$, $\angle AMC = 135°$.

86. $\angle BAC = 45°$, $\angle ACB = 60°$, $\angle ABC = 75°$.

87. C.

88. a) *Nurodymas.* $\angle AOC = 60°$; b) 30°.

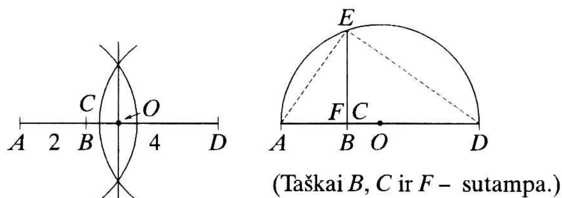
89. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $\angle ABC = 90°$ ir $\angle ABD = 90°$.

90. $\angle ANB = \angle AM_1B$ (įbrėžti į apskritimą kampai, besiremiantys į tą patį lanką AB), $\angle AMB = \angle AN_1B$ (įbrėžti į kitą apskritimą kampai ir besiremiantys į tą patį lanką AB). Kadangi $\angle MBN = 180° - \angle N - \angle M$, $\angle M_1BN_1 = 180° - \angle M_1 - \angle N_1$, tai $\angle MBN = \angle M_1BN_1$.

91. *Nurodymas.* Nors šis uždavinys yra neprivalomas visiems mokiniams, tačiau jį galima pasiūlyti išspręsti ir silpnesniems. Stipresni moksleiviai nesunkiai įveiks uždavinį taikydami dviejų susikertančių stygų atkarpų sandaugos teoremą, t. y. $CE \cdot (CD - CE) = AE \cdot EB$; be to, $AE = EB$ (žr. a) punkto brėžinį). Silpnesnieji turėtų prisiminti apskritimo skersmens, statmeno apskritimo stygai, savybę (jis stygą dalija pusiau) ir Pitagoro teoremą.

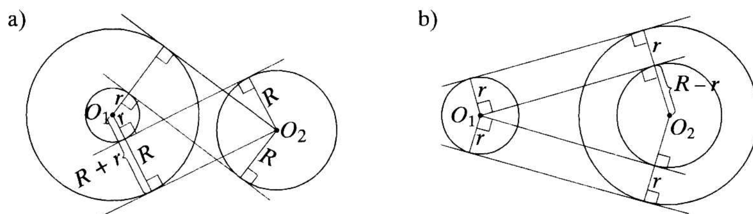
Atsakymas. a) 2 cm; b) $10\sqrt{3}$ cm.

92. Kaip nubrėžti tokią atkarpą EF, pavaizduota brėžiniuose:

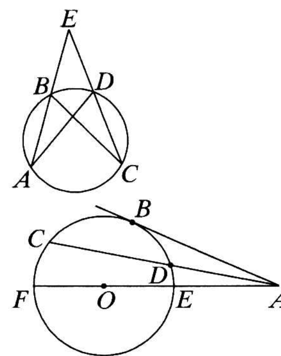


(Taškai B, C ir F – sutampa.)

93. Kaip nubrėžti dvi liestines, parodyta brėžinyje a).
Pastebėsime, kad duotiesiems dviem apskritimams galima nubrėžti ir dar dvi kitas liestines. Jos braižomos taip (žr. brėžinį b)):
1) Nubrėžiame apskritimą, kurio centras yra mažesniojo apskritimo centras O_1, o spindulys lygus duotųjų apskritimų spindulių sumai.
2) Iš kito apskritimo centro O_2 nubrėžiame dvi liestines nubrėžtam didžiajam apskritimui.
3) Liestines pastūmę lygiagrečiai atstumu, lygiu apskritimo, kurio centras O_2, spinduliui, gauname dvi duotųjų apskritimų liestines.



94. Trikampiai ADE ir CBE yra panašūs pagal du lygius kampus: $\angle BAD = \angle BCD$ (abu remiasi į lanką BD), $\angle AED = \angle BEC$ (bendras abiejų trikampių kampas). Vadinasi, $\frac{EB}{ED} = \frac{EC}{EA}$, t. y. $EB \cdot EA = ED \cdot EC$.



Pastaba. Uždavinyno 6 sk. 33 uždavinyje yra įrodoma, kad $AB^2 = AD \cdot AC$. Šią liestinės atkarpos savybę galima įrodyti remiantis 94 uždaviniu. Per tašką A ir apskritimo centrą nubrėžkime kirstinę, kuri kerta apskritimą taškuose E ir F. Tuomet pagal 94 uždavinį $AE \cdot AF = AD \cdot AC$. Iš stačiojo trikampio OBA: $AB^2 = OA^2 - OB^2 = (OA - OB)(OA + OB) = (OA - OE)(OA + OE) = AE \cdot AF = AD \cdot AC$.

95. a) 4 m; b) vieno blokelio aukštis — 50 cm, vieno blokelio plotis — 1 m.

96. $CE = 10$ cm, $ED = 2$ cm.
Nurodymas. Taikykite susikertančių stygų atkarpų sandaugos savybę.

97. a) -8; 12; b) 1; 25; c) -1; 1.

98. Tokios x reikšmės nėra.
Nurodymas. Lygtis $5x^2 - 11x - 3 = -(4x^2 - 5x + 11)$ neturi sprendinių.

99. a) $a(x^2 - 45) = 0$, $a \neq 0$; b) $a(x^2 - 4x + 1) = 0$, $a \neq 0$.

100. 10 cm ir 6 cm.

101. a) $x < -4$ ir $x > 4$; b) $x = 0$; c) funkcija mažėja.

102. A.

6.6. Įbrėžtiniai daugiakampiai

6 ir 7 skyreliuose nagrinėjama apskritimo ir daugiakampio tarpusavio padėtis, t. y. šiame skyrelyje — daugiakampiai, kurių viršūnės yra apskritimo taškai, kitame — daugiakampiai, kurių kraštinės liečia apskritimą. Abiejų skyrelių struktūra yra vienoda:

1) pateikus pavyzdžius apibrėžiamas įbrėžtinis (apibrėžtinis) daugiakampis (apskritimas);
2) parodoma, kuo pasižymi apibrėžtinio (įbrėžtinio) apskritimo centras, ir nurodoma, kaip jį rasti;
3) parodoma, kaip apibrėžti (įbrėžti) apskritimą apie trikampį, ir teigiama, kad tai galima padaryti kiekvienam trikampiui;
4) pateikiamos ir įrodomos įbrėžtinių (apibrėžtinių) keturkampių savybės;
5) suformuluojami teiginiai, nusakantys, apie kokį keturkampį galima apibrėžti (į kokį — įbrėžti) apskritimą.

Pastaba. Nagrinėjant šių skyrių teorinę dalį rekomenduojame mokiniams dirbti savarankiškai (be mokytojo pagalbos). Galima organizuoti ir darbą grupėmis. Galima 6 ir 7 skyrelių medžiagą sujungti, pavyzdžiui, vienoje pamokoje nagrinėti, kaip įbrėžti (kaip apibrėžti) apskritimą į trikampį (apie trikampį), kitoje — tą patį atlikti su keturkampiu.

Pakartoti:

atkarpos vidurio statmens savybę;
kam lygi keturkampio kampų suma.

Išmokti:

kas yra įbrėžtinis daugiakampis (apibrėžtinis apskritimas);
koks taškas yra apibrėžtinio apie trikampį apskritimo centras;
apibrėžti apie trikampį apskritimą;
apie kokį keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

Šiame skyrelyje:

1. Brėžinyje pavaizduoti daugiakampiai, kurių viršūnės yra apskritimo taškai, ir pateikiamas įbrėžtinio daugiakampio bei apibrėžtinio apskritimo apibrėžimas.
2. Pastebima, kad apibrėžto apie daugiakampį apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio viršūnių.

   Pastaba. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog toks taškas yra daugiakampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.
3. Detaliai parodoma, kaip apie trikampį apibrėžti apskritimą.

   Pastaba. Tai padaryti turi mokėti dauguma mokinių.
4. Teigiama, kad

   Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.

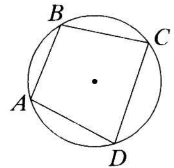
   Nurodymas. Būtinai atlikite 1 užduotį ir padarykite išvadą, kad apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra:
   - trikampio viduje, kai trikampis smailusis;
   - trikampio išorėje, kai trikampis bukasis;
   - įžambinės vidurio taškas, kai trikampis statusis.
5. Atliekant 2 užduotį parodoma, kad ne apie kiekvieną keturkampį galima apibrėžti apskritimą, ir formuluojamas bei įrodomas teiginys, kad

   Kiekvieno įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°.

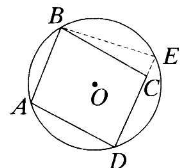
Nurodymas. Svarbu, kad mokiniai žinotų šiam teiginiui atvirkštinį teiginį.

Jeigu keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°, *tai apie jį galima apibrėžti apskritimą.*

Įrodysime šį teiginį.



Duota: keturkampis $ABCD$, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, $\angle BCD + \angle BAD = 180°$.
Įrodyti: apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą.
Įrodymas. Per 3 keturkampio viršūnes A, B ir D nubrėžkime apskritimą. Įsitikinsime, kad ketvirtoji viršūnė C negali būti nei šio apskritimo viduje, nei jo išorėje.



Tarkime, kad taškas C yra apskritimo viduje. Pratęsę kraštinę DC iki susikirtimo su apskritimu (taške E) gauname keturkampį $ABDE$, įbrėžtą į apskritimą. Pagal įrodytą savybę: $\angle BAD + \angle BED = 180°$. Kadangi $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ (pagal sąlygą), tai $\angle BCD = \angle BED$. Tačiau taip būti negali (trikampio BCE priekampis BCD negali būti lygus jo vidiniam negretutiniam kampui). Taigi prielaida, kad taškas C yra apskritimo viduje, yra neteisinga. Analogiškai įrodoma, kad taškas C negali būti ir apskritimo išorėje.

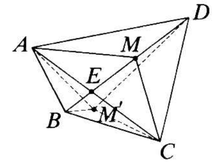
Nurodymas. Kuo dažniau mokiniams priminkite, kad apie daugiakampį apibrėžto apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo visų daugiakampio viršūnių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

103–113 pratimai yra teminiai; 114–120 — kartojimo. 43–46, 50, 51, 61, 62

103. *Nurodymas.* Skriestuvu ir liniuote nubraižykite trikampį, kurio kraštinės yra 3 cm, 5 cm ir 7 cm. Nubrėžę trikampio kraštinių vidurio statmenis rasite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo centrą.

104. a) Šulinį reikia kasti apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centre.



b) Keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD susikirtimo taške E. Įsitikinsime, kad bet kurio kito plokštumos taško M atstumų iki taškų A, B, C ir D suma $AM + BM + CM + DM > AC + BD$. Jeigu taškas M yra įstrižainėje BD, tai $AM + MC > AC$ ir $AM + MC + DM + MB > AC + BD$. Analogiškai, kai taškas M yra įstrižainėje AC, tai $AM + MC + DM + MB > AC + BC$. Sakykime, kad taškas M' — bet kuris daugiakampio $ABCD$ taškas. Tuomet $AM' + M'C + BM' + M'D > AC + BD$.

105. a) $x = 100°$; b) $x = 95°$, $y = 91°$.

106. 1) a) Ne; b) taip; c) taip; 2) a) taip; b) ne; c) taip.

107. a) $S = 4\sqrt{105}\,\text{cm}^2$ ($\approx 41\,\text{cm}^2$), $P = 21 + \sqrt{105}\,\text{cm}$ ($\approx 31{,}25\,\text{cm}$); b) 9 cm, 12 cm, $S = 54\,\text{cm}^2$.

108. a) Jei apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra vienoje trikampio kraštinėje, tai ta kraštinė yra apskritimo skersmuo. Vadinasi, prieš šią kraštinę esantis kampas yra status (įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į skersmenį, yra status), ir trikampis yra statusis.

b), c) Apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas. Kadangi jis yra aukštinėje (aukštinės tęsinyje), tai ši aukštinė kartu yra ir pusiaukraštinė, ir trikampis yra lygiašonis.

Kadangi apibrėžto apskritimo centras yra:

b) trikampio viduje, tai trikampis yra smailusis lygiašonis;

c) trikampio išorėje, tai trikampis yra bukasis lygiašonis.

Jei gerai išsinagrinėjote teorinėje dalyje pateiktą 1 užduotį (p. 35), tai čia didesnių sunkumų neturėtų kilti.

109. a) 5 cm; b) 18 cm.

110. $\frac{289}{30}$ cm ($\approx 9{,}6$ cm).

111. a) Sakykime, kad apie rombą $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą. Tuomet $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$. Kadangi rombo priešingieji kampai lygūs, tai $\angle A = \angle C = 90°$ ir $\angle B = \angle D = 90°$. Rombas, kurio kampai statūs, yra kvadratas.

b) Žr. a) punkto įrodymą.

112. a) Kadangi stačiakampio priešingųjų kampų sumos lygios po 180°, tai apie jį galima apibrėžti apskritimą. Apskritimo centras — stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas.

b) Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindų yra lygūs, o visų trapecijos kampų suma yra 360°, tai trapecijos priešingųjų kampų sumos lygios po 180°. Vadinasi, apie lygiašonę trapeciją galima apibrėžti apskritimą.

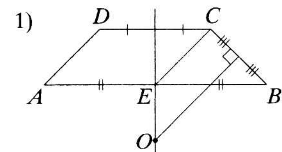
Ištirsime šio apskritimo centro padėtį. Pastebėsime, kad apskritimo centras yra trapecijos simetrijos ašyje.

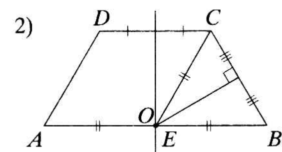
Sakykime, kad E — didžiojo pagrindo vidurio taškas, o EC jungia viršūnę C su didžiojo pagrindo vidurio tašku. Tuomet:

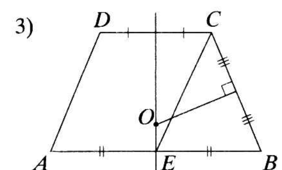
1) jeigu $EB > EC$, tai apskritimo centras yra trapecijos išorėje;

2) jeigu $EB = EC$, tai apskritimo centras yra didžiojo pagrindo vidurio taškas;

3) jeigu $EB < EC$, tai apskritimo centras yra trapecijos viduje.







113. *Brėžimas.* Sakykime, kad duotas spindulys R ir kampas α. Nubrėžiame spindulio R apskritimą. Per jo centrą brėžiame du skersmenis AC ir BD, kampas tarp kurių lygus α. Keturkampis $ABCD$ — reikiamas stačiakampis.

114. a) 120°; b) $12 + 4\sqrt{3}$ cm ($\approx 18{,}9$ cm).

115. a) 50°; b) 80°.

116. 6 cm.

117. a) -4; $\frac{1}{2}$; b) $5 - \sqrt{5}$; $5 + \sqrt{5}$.

118. Sakykime, kad motociklininkas turi važiuoti x km/h greičiu. Per 1 h motociklininkas prisiveja dviratininką $(x - 10{,}5)$ km. 7,5 km atstumą motociklininkas įveiks, t. y. pavys dviratininką, per $\frac{7{,}5}{x-10{,}5}$ h. Pagal sąlygą sudarome lygtį:

a) $\frac{7{,}5}{x-10{,}5} = \frac{1}{4}$, $x = 40{,}5$; b) $\frac{7{,}5}{x-10{,}5} = \frac{1}{5}$, $x = 48$; c) $\frac{7{,}5}{x-10{,}5} = \frac{1}{6}$, $x = 55{,}5$;

d) $\frac{7{,}5}{x-10{,}5} = \frac{t}{60}$, $xt - 10{,}5t = 450$, $x = \frac{3(300+7t)}{2t}$.

Atsakymas. a) 40,5 km/h; b) 48 km/h; c) 55,5 km/h; d) $\frac{3(300+7t)}{2t}$ km/h.

119. Pagal sąlygą akivaizdu, kad daliklis gali būti lygus tik 13, nes dalmuo yra skaičius, ne mažesnis už 30. Jeigu dalmuo 30, tai dalinys lygus 390. Dalmuo būti lygus 31 negali, nes tuomet dalinys būtų $31 \cdot 13 = 403$, o tai netinka pagal sąlygą. $390 : 13 = 30$.

120. Sakykime, kad galva sveria x kg. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x = 1 + \frac{x+1}{2}$, $x = 3$; $3 + 4 + 1 = 8$.

Atsakymas. 8 kg.

6.7. Apibrėžtiniai daugiakampiai

Kaip jau minėjome, skyrelio teorinė medžiaga pateikta analogiškai kaip ir 6 skyrelyje.

Pakartoti:
pusiaukampinės savybę;
apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybę.

Išmokti:
kas yra apibrėžtinis daugiakampis (įbrėžtinis apskritimas);
koks taškas yra įbrėžtinio į trikampį apskritimo centras;
įbrėžti į trikampį apskritimą;
į kokį keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

Šiame skyrelyje:

1. Brėžinyje pavaizduoti daugiakampiai, kurių kraštinės liečia apskritimą. Pateikiamas apibrėžtinio daugiakampio bei įbrėžtinio apskritimo apibrėžimas.
2. Pastebima, kad įbrėžto į daugiakampį apskritimo centras yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio kraštinių.

   Pastaba. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog toks taškas yra daugiakampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.
3. Detaliai parodoma, kaip į trikampį įbrėžti apskritimą.

   Nurodymas. Tai padaryti turi mokėti dauguma mokinių.
4. Teigiama, kad

   Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą.

   Pastaba. Galite paklausti mokinių, kur trikampyje (viduje, išorėje, kraštinėje) yra įbrėžtinio apskritimo centras.
5. Atliekant užduotį parodoma, kad ne į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą, bei formuluojamas ir įrodomas teiginys, kad

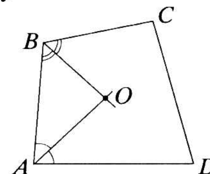
   Kiekvieno apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios.

Pastaba. Svarbu, kad mokiniai žinotų šiam teiginiui atvirkštinį teiginį:

Jeigu keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai į jį galima įbrėžti apskritimą.

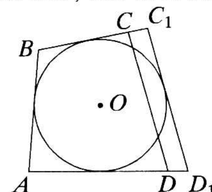
Pateikiame šio teiginio įrodymą:

Duota: keturkampis $ABCD$, $AB + CD = AD + BC$.
Įrodyti: į keturkampį $ABCD$ galima įbrėžti apskritimą.



Įrodymas. Kampų A ir B pusiaukampinių susikirtimo taškas O vienodai nutolęs nuo kraštinių AD, AB ir BC, todėl galima nubrėžti apskritimą, kurio centras O, liečiantį tris kraštines AD, AB ir BC.

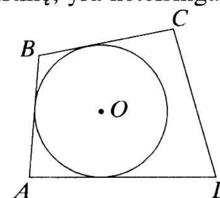
Įrodysime, kad jis liečia ir ketvirtąją kraštinę CD. Tarkime priešingai, kad šis apskritimas kerta kraštinę CD.



Nubrėžkime apskritimui liestinę, lygiagrečią kraštinei CD. Ji kerta kraštinių BC ir AD tęsinius taškuose C_1 ir D_1. Kadangi keturkampis ABC_1D_1 yra apibrėžtinis, tai $AB + C_1D_1 = AD_1 + BC_1$. Tačiau $BC_1 = BC + CC_1$, $AD_1 = AD + DD_1$, todėl gauname: $AB + C_1D_1 = BC + CC_1 + AD + DD_1$, t. y. $C_1D_1 = BC + AD - AB + CC_1 + DD_1$. Pasinaudoję sąlygoje duota lygybe $AB + CD = AD + BC$ gauname: $D_1C_1 = CD + CC_1 + DD_1$.

Gavome, kad keturkampio D_1DCC_1 viena kraštinė lygi kitų trijų kraštinių sumai. Lengva įsitikinti, kad taip būti negali (įsitikinkite!). Todėl prielaida, kad apskritimas kirto ketvirtąją kraštinę, yra neteisinga.

Panašiai nagrinėjamas atvejis, kai CD neturi bendrų taškų.



Vadinasi, apskritimas liečia kraštinę CD. Tai ir reikėjo įrodyti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

121–127 — teminiai pratimai; 128–139 — kartojimo.

47, 48, 52–60, 63–77

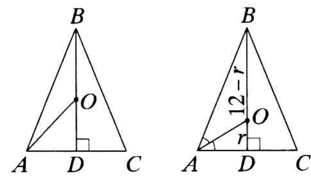
121. *Nurodymas.* Skriestuvu ir liniuote nubraižykite trikampį ABC, kurio $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm ir $AC = 7$ cm. Nubraižykite (su matlankiu ar skriestuvu ir liniuote) šio trikampio kampų A ir B pusiaukampines. Jų susikirtimo taškas O — įbrėžto į trikampį apskritimo centras.

122. a) 13; b) 5; c) 5.

123. 2 cm. *Nurodymas.* Apskaičiavę įžambinės ilgį rasite ir apskritimo spindulį.

124. *Duota*: $\triangle ABC$ — lygiašonis, $AB = BC = 13$ cm, $AC = 10$ cm.
Rasti: 1) apibrėžto apie $\triangle ABC$ apskritimo spindulį; 2) įbrėžto į $\triangle ABC$ apskritimo spindulį.

Sprendimas.



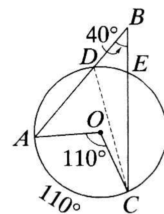
1) Apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys yra aukštinėje BD. Sakykime, kad jo centras O. Tuomet $AO = OB = R$. Kadangi $AD = DC = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (cm), tai iš stačiojo trikampio ADB: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 169 - 25 = 144$, $BD = 12$ cm. Vadinasi, $OD = 12 - R$. Iš stačiojo trikampio ADO: $AO^2 = AD^2 + OD^2$, t. y. $R^2 = 5^2 + (12 - R)^2$. Iš čia $R = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$ (cm).
2) Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras O irgi priklausys trikampio aukštinei BD. Jis yra kampo A pusiaukampinės ir aukštinės BD susikirtimo taškas. Pagal kampo A pusiaukampinės savybę: $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{AB}$, $\frac{r}{12-r} = \frac{5}{13}$. Iš čia $r = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ (cm).

125. a) Ne; b) taip; c) ne. *Pastaba.* Šį uždavinį galima spręsti ir su visais mokiniais.

126. a) 32 cm; b) 48 cm.

127. a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; b) 3 cm ir 9 cm; c) $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

128. *Duota*: $AB = BC$, $\angle ABC > 90°$, $AC = 24$ cm, $OA = 13$ cm (apibrėžtinio apskritimo spindulys).
Rasti: AB.



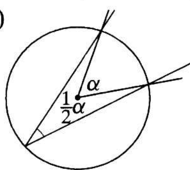
Sprendimas. $AD = DC = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} = 12$ cm. Iš stačiojo $\triangle ADO$: $OD^2 = OA^2 - AD^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $OD = 5$ cm. $BD = OB - OD = 13 - 5 = 8$ (cm). Iš stačiojo $\triangle ADB$: $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$, $AB = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ (cm).
Atsakymas. $4\sqrt{13}$ cm, $4\sqrt{13}$ cm, 24 cm.

129. a) *Nurodymas.* Apskaičiuokite trikampio CAD kampus C ir D.
b) $P = (8 + 4\sqrt{3})$ cm, $S = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

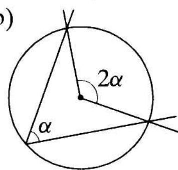
130. 30°. *Nurodymas.* Galima remtis uždavinyno 6 skyriaus 32 uždaviniu (jo sprendimas yra pateiktas atsakymuose): $40° = \frac{1}{2}(110° - x)$.
Galima šį uždavinį spręsti ir kitaip:
$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 110° = 55°$, tai $\angle BDC = 180° - 55° = 125°$.
Tuomet $\angle DCE = 180° - (125° + 40°) = 15°$, o $\smile DE = 30°$.

131. $\angle A = 60°$, $\angle B = 82{,}5°$, $\angle C = 37{,}5°$.

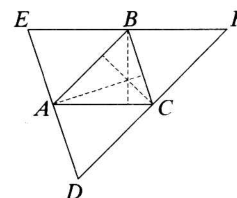
132. a)



b)

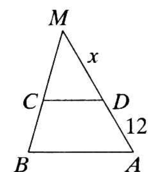


133. Tiesės, nubrėžtos per trikampio ABC viršūnes lygiagrečiai priešingoms trikampio kraštinėms, sudaro trikampį DEF. Kadangi keturkampiai $AEBC$ ir $ABFC$ yra lygiagretainiai (priešingos kraštinės yra lygiagrečios), tai $AC = EB = BF$. Taškas B yra kraštinės EF vidurio taškas. Analogiškai įrodome, kad taškai C ir A yra kraštinių DF ir DE vidurio taškai. Taigi trikampio ABC aukštinės yra trikampio EFD kraštinių vidurio statmenyse.
Kadangi trikampio kraštinių vidurio statmenys kertasi viename taške, tai tame taške kertasi ir trikampio ABC aukštinės.



134. a) $(x+4)^2 - 9$; b) -7; -1; c) $(-4; -9)$; e) $f(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; -7)$, $(-1; +\infty)$; $f(x) < 0$, kai $x \in (-7; -1)$; trinario reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; -4)$, ir didėja, kai $x \in (-4; +\infty)$.

135. *Duota*: $ABCD$ — trapecija, $AD = 12$ cm, $CB : CM = 3 : 4$, $CD \parallel AB$.
Rasti: DM.



Sprendimas. Pagal Talio teoremą: $\frac{CM}{MB} = \frac{MD}{MA}$. Pažymėkime $MD = x$.
a) $\frac{x}{x+12} = \frac{4}{7}$ $\left(\frac{CM}{CB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{CM}{MB} = \frac{4}{7}\right)$. Iš čia $x = 16$ cm.
b) $\frac{x}{x+12} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{6}}$, $\frac{x}{x+12} = \frac{6}{31}$; $31x = 6x + 72$, $25x = 72$, $x = \frac{72}{25}$.
Atsakymas. a) 16 cm; b) $2\frac{22}{25}$ cm.

136. **B** ir **D**.

137. *I būdas.* Kadangi $x_1 = 5$, tai $5^2 + p \cdot 5 - 35 = 0$, $p = 2$. Kitas lygties sprendinys lygus -7.
II būdas. Pagal Vijeto teoremą $x_1 \cdot 5 = -35$, todėl $x_1 = -7$. Kadangi $x_1 + x_2 = -p$, tai $p = 2$.
Atsakymas. -7; $p = 2$.

138. $17m - 98$; a) 6; b) 5; c) 0,5; d) 10.

139. Kadangi žinoma, jog duotasis skaičius n nelyginis, tai tegul jis yra $2m + 1$, $m \in \mathbf{N}$. Po algoritmo pirmojo žingsnio skaičius $2m + 8$ yra lyginis, o po antrojo yra $m + 4$. Jis negali būti nelyginis (tuo atveju $m + 4$ pagal algoritmą turėtų būti lygus 10). Vadinasi, $\frac{m+4}{2} = 17$, $m = 30$ ir nelyginis skaičius yra $2 \cdot 30 + 1 = 61$. Jo skaitmenų suma 7.
Atsakymas. **A**.

6.8. Taisyklingieji daugiakampiai

Šiuo skyreliu apibendrinamos žinios apie taisyklinguosius daugiakampius. Skyrelyje detaliau nagrinėjami tik lygiakraštis trikampis, kvadratas ir taisyklingasis šešiakampis. Reikia siekti, kad *visi* mokiniai mokėtų apskaičiuoti taisyklingojo trikampio, keturkampio ir šešiakampio apibrėžtinių ir įbrėžtinių apskritimų ilgius, kai žinomas taisyklingojo daugiakampio kraštinės ilgis (ir atvirkščiai), bei taisyklingojo n-kampio kampus.

Pakartoti:

kam lygi n-kampio vidaus kampų suma;
kaip rasti įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrus;
lygiakraščio trikampio ir kvadrato savybes;
Pitagoro teoremą.

Išmokti:

kas yra taisyklingasis daugiakampis;
kas yra taisyklingojo daugiakampio centras;
sąryšius tarp lygiakraščio trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgio ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgio.

Šiame skyrelyje:

1. Panagrinėjus lygiakraščio trikampio bei kvadrato kraštines ir kampus apibrėžiama, kokį daugiakampį vadinsime taisyklinguoju.

> *Iškilasis daugiakampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs, vadinamas taisyklinguoju.*

   Šį apibrėžimą turėtų suprasti visi mokiniai, ypač tai nesunku bus atsakius į prieš apibrėžimą pateiktus klausimus.

   Pastaba. Ar mokiniai gerai suprato šį apibrėžimą, galite įsitikinti nubraižę lentoje keletą taisyklingųjų ir netaisyklingųjų daugiakampių.

2. Formuluojamas teiginys, kad apie bet kurį taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą ir į bet kurį taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą ir kad tų apskritimų centrai sutampa. (Fone šis teiginys įrodytas taisyklingajam trikampiui, kvadratui ir šešiakampiui. Analogiškas įrodymas tinka ir bet kokiam taisyklingajam daugiakampiui: šešiakampio atveju turėtą kampą $AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ tereikia pakeisti kampu $AOB = \frac{360^\circ}{n} = \alpha$.)

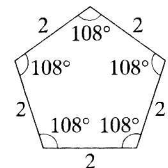
   Nurodymai. 1) Būtinai atlikite vadovėlyje esančią 1 užduotį. Ją atlikdami mokiniai turi prisiminti, kur yra įbrėžto į daugiakampį ir kur — apibrėžto apie daugiakampį apskritimų centrai. Taip pat reikėtų prisiminti, kad lygiakraščio trikampio pusiaukampinės, pusiaukraštinės ir aukštinės sutampa (todėl ir pusiaukampinių susikirtimo taškas sutampa su kraštinių vidurio statmenų susikirtimo tašku). Panašų „atradimą“ padarykite ir kvadratui.
   2) Atkreipkite mokinių dėmesį į taisyklingojo daugiakampio centro sąvoką (netaisyklingieji daugiakampiai centro neturi).

3. Lentelėje pateiktos formulės, siejančios įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulius bei trikampio, kvadrato ir šešiakampio kraštines. Jų išvedimas visiems mokiniams neprivalomas — jis pateiktas pilkame fone.

   Pastaba. Būtų gerai, kad dauguma mokinių mokėtų apskaičiuoti įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgius ir nesiremdami formulėmis. Patirtis rodo, kad mokiniams tai neblogai sekasi. Šiais uždaviniais įtvirtinama trikampio pusiaukraštinių savybė.

4. Pateikta 2 užduotis, kuria siekiama išmokyti nubraižyti skriestuvu taisyklingąjį šešiakampį, kai žinomas jo kraštinės ilgis.

   Pastaba. Kaip nubraižyti taisyklingąjį n-kampį? Tai galima atlikti matlankiu ir liniuote. Pavyzdžiui, nubraižykime taisyklingąjį penkiakampį, kurio kraštinės ilgis 2 cm. Pirmiausia apskaičiuokime taisyklingojo penkiakampio vieno kampo didumą: $\frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$.



   Dabar jau nesunku nubraižyti penkiakampį. Aišku, toks penkiakampio brėžinys yra tik apytikslis.

   Lengva į apskritimą įbrėžti bet kokį taisyklingąjį n-kampį (apytiksliai). Pirmiausia reikia apskaičiuoti kampą, kuriuo matoma taisyklingojo n-kampio kraštinė iš centro. Pavyzdžiui, taisyklingojo 10-kampio kraštinė iš centro matoma 36° kampu. Matlankiu pilnutinį kampą, kurio viršūnė O, padalijame į 10 lygių dalių (po 36° laipsnius). Kampų kraštinės apskritimą kirs 10 taškų, kuriuos nuosekliai sujungę gausime taisyklingąjį 10-kampį (apytiksliai nubraižytą). Kaip skriestuvu ir liniuote nubraižyti taisyklingąjį trikampį, keturkampį, penkiakampį, parodyta vadovėlyje.

   Nesunku nubraižyti ir daugiakampius, kurių kraštinių skaičius yra padvigubintas (šešiakampį, aštuonkampį, dešimtkampį, dvylikakampį ir t. t.).

   Jau senovės matematikai (tarpe jų ir Archimedas) skriestuvu ir liniuote mokėjo nubraižyti n-kampius, kai $n = 3, 4, 5, 6, 2^k, 2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5, 2^k \cdot 15$ (čia $k = 0, 1, 2, \ldots$).

   Reikėtų atkreipti dėmesį, kad skriestuvu ir liniuote galima nubraižyti ne bet kokį taisyklingąjį daugiakampį. Pavyzdžiui, kai $k = 0, 1, 2, 3$, tai taisyklingąjį trikampį, penkiakampį, septyniolikakampį ir 257-kampį skriestuvu ir liniuote nubraižyti galima, o septyniakampio — negalima. K. Gausas, būdamas 17 metų, įrodė, kad skriestuvu ir liniuote galima nubraižyti tik tokius taisyklinguosius n-kampius, kurių kraštinių skaičius — pirminis skaičius, kai $n = 2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 140–154 pratimai; kartojimui — 155–163 pratimai. 78–83

140. $P_{\text{tr.}} = 3a$, $S_{\text{tr.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_{\text{kv.}} = 4a$, $S_{\text{kv.}} = a^2$; $P_{\text{šešiak.}} = 6a$; $S_{\text{šešiak.}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

141. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

142. a) $5\sqrt{3}$ cm; b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

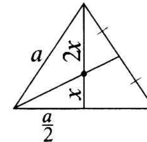
143. a) $\sqrt{2}$ dm; b) 2 cm.

144. a) 7 cm; b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

145. a) $400\sqrt{3}$ m^2; b) 900 m^2; c) $600\sqrt{3}$ m^2.

146. $r = 1\frac{2}{3}$ cm, $R = 3\frac{1}{3}$ cm. *Nurodymas.* Įbrėžto ir apibrėžto apskritimų centrai sutampa ir yra lygiakraščio trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Taikykite trikampio pusiaukraštinių savybę: $x + 2x = 5$, $x = \frac{5}{3}$; $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

Pastaba. Galima spręsti ir taikant formules $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ir $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tuomet kraštinės a ilgį surasite taikydami Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui, kurio įžambinė lygi a, vienas statinis — $\frac{a}{2}$, o kitas — 5.



147. a) $S_{\triangle} = \frac{14^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3}$ (cm^2), $R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm, $S_{\text{skritulio}} = \pi \cdot \left(\frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{196\pi}{3}$ (cm^2). Nuspalvintos dalies plotas $S = S_{\text{skritulio}} - S_{\triangle} = \frac{196\pi}{3} - 49\sqrt{3} = \frac{49(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$ (cm^2);
b) $(16\pi - 32)$ cm^2; c) $200(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2.

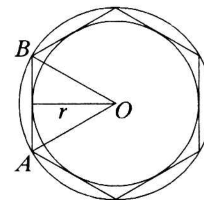
148. 1) $\frac{360°}{n}$; 2) $180°(n-2)$; 3) $\frac{180°(n-2)}{n}$.

149. a) 8, 11, 13; b) 10, 12, 36.

150. 4π cm^2.

151. 32 cm^2.

152. Kadangi didžiojo apskritimo ilgis lygus 4π, tai jo spindulys $AO = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$. Įbrėžto į šį apskritimą taisyklingojo šešiakampio kraštinė $AB = AO = 2$, o plotas bus lygus 6 lygių lygiakraščių trikampių plotų sumai, t. y.
$S_{\text{šešiakampio}} = 6S_{\triangle AOB} = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.
Žiedo tarp apskritimų plotas lygus didžiojo skritulio ir mažojo skritulio plotų skirtumui, t. y. $S_{\text{žiedo}} = \pi \cdot AO^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(2^2 - r^2)$; $r = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, tai $S_{\text{žiedo}} = \pi(2^2 - (\sqrt{3})^2) = \pi$.
Atsakymas. $S_{\text{šešiakampio}} = 6\sqrt{3}$, $S_{\text{žiedo}} = \pi$.



153. Nėra tokio n-kampio, kurio kraštinė būtų matoma iš centro 7° kampu.
72-kampio kraštinė iš centro matoma 5° kampu.

154. 3) Lygiakraštis trikampis; 4) $P = 24$ cm, $S = 16\sqrt{3}$ cm^2.

155. a) 30 cm; b) $32\sqrt{2}$ cm.

156. a) $AB = 24$, $BC = 16$; b) $AB = 20$, $BC = 40$; c) $R = 12{,}5$.

157. a) $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$; b) $-1 - \sqrt{6}$; $-1 + \sqrt{6}$.

158. Pažymėkime tris vienas po kito einančius lyginius skaičius $2n$, $2n+2$ ir $2n+4$. Sprendžiame lygtį: $(2n)^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2$, $n = -1$ (netinka), $n = 3$.
Atsakymas. 6, 8 ir 10.

159. a) $2x^2 - 6x + 4$; b) $2(x-1)(x-2)$; c) 1; 2; e) –0,5; f) $x \in [1; 2]$; g) intervale [1; 3] reiškinys įgyja visas reikšmes iš intervalo [–0,5; 4].

160. a) 1016,45 Lt; b) 976,5 Lt.
Nurodymas. Tarifinis atlyginimas lygus valandinio atlygio ir darbo laiko sandaugai; pareiginis atlyginimas lygus bazinės mėnesinės algos ir kvalifikacinio koeficiento sandaugai.

161. (2; 1).

162. a) 3120 g; b) 936 g.

163. $15^3 = 3375$.
Samprotauti galima taip: kadangi dviženklio skaičiaus paskutinis skaitmuo (b) sutampa su gauto keturženklio skaičiaus paskutiniu skaitmeniu, tai b gali būti 1, nes $\underline{1}^3 = \underline{1}$; 4, nes $\underline{4}^3 = 6\underline{4}$; 5, nes $\underline{5}^3 = 12\underline{5}$; 6, nes $\underline{6}^3 = 21\underline{6}$ ir 9, nes $\underline{9}^3 = 72\underline{9}$. Be to, $10 < \overline{ab} < 22$, nes $10^3 = 1000$, o $22^3 = 10\,648$ (penkiaženklis skaičius). Taigi ieškomas dviženklis skaičius galėtų būti 11, 14, 15, 16, 19 arba 21. Keldami šiuos skaičius kubu gausime, kad tik $15^3 = 3375$.

6.9. Skritulio išpjova, nuopjova

Šį skyrelį galima laikyti 4 skyrelio tęsiniu. Skyrelyje apibrėžiama skritulio išpjova ir nuopjova. Su skritulio išpjovomis mokiniai jau yra susipažinę (pvz., skritulinėse diagramose). Pagrindinis tikslas yra išmokyti apskaičiuoti išpjovos lanko ilgį ir plotą, kai žinomas skritulio spindulys ir centrinis kampas. Pastebėsime, kad nuopjovos plotą sugebame apskaičiuoti tik tais atvejais, kai nuopjovos centrinis kampas lygus 60°, 90°, 120°. Bet kokio centrinio kampo nuopjovos plotą skaičiuosime 10 klasėje remdamiesi trigonometrinėmis funkcijomis.

Pakartoti:

kas yra skritulio centrinis kampas;

ryšį tarp centrinio kampo ir jį atitinkančio lanko didumų.

Išmokti:

kas yra išpjova ir nuopjova;

apskaičiuoti išpjovos lanko ilgį ir plotą;

apskaičiuoti nuopjovos, atitinkančios centrinį kampą, lygų 60°, 90°, 120°, lanko ilgį ir plotą.

Šiame skyrelyje:

1. Apibrėžiamos skritulio išpjovos ir jos lanko sąvokos.
2. Pateikiamas 1 uždavinys išpjovos lanko ilgio ir ploto formulėms išvesti.

   Pastaba. Nereikia reikalauti iš mokinių atsiminti formules $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ ir $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$. Daug svarbiau, kad mokiniai suvoktų, kaip jos gaunamos. (Užduoties atsakymas: $\alpha = 54°$, $S = 47{,}1\,\text{cm}^2$ (laikome $\pi \approx 3{,}14$).)
3. Apibrėžiama skritulio nuopjova.
4. Pateikiamas 2 uždavinys, analogiškas 1 uždaviniui, siekiant parodyti, kaip galima apskaičiuoti nuopjovos plotą. (Nuopjovos lanko ilgis skaičiuojamas analogiškai kaip ir išpjovos atveju.) Mokiniai turi suvokti, kad skaičiuojant nuopjovos plotą reikia apskaičiuoti išpjovos plotą ir pridėti (ar atimti) trikampio plotą.

   Nurodymas. Jei nuopjovos lankas lygus pusapskritimiui, tai nuopjovos plotas lygus pusei skritulio ploto.
5. Pateikiamas pavyzdys skaičiuojant plotą nuopjovos, atitinkančios 60° centrinį kampą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

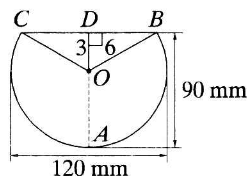
Teminiai yra 164–168, 171, 174 ir 175 pratimai. Likę pratimai — kartojimo. 84–101

164. a) $12{,}5\pi$ cm²; b) 15π cm²; c) 21π cm²; d) 30π cm².

165. a) $\frac{8(8\pi-6\sqrt{3})}{3}$ cm²; b) $\frac{8(4\pi-6\sqrt{3})}{3}$ cm²; c) $16(\pi-2)$ cm²; d) $\frac{16(8\pi+3\sqrt{3})}{3}$ cm².

166. a) $\approx 56\,\text{cm}^2$, $\approx 30\,\text{cm}$; b) $21{,}2\,\text{cm}^2$, $P = 18{,}42\,\text{cm}$.
Pastaba. Šį uždavinį gali spręsti ir visi mokiniai.

167. $3(8\pi + 3\sqrt{3})\,\text{cm}^2$.



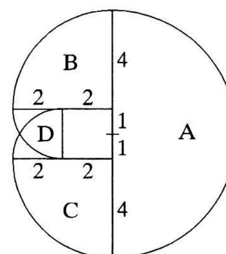
Sprendimas. $OA = \frac{120}{2} = 60\,(\text{mm}) = 6\,(\text{cm})$. $OD = AD - AO = 90 - 60 = 30\,(\text{mm}) = 3\,(\text{cm})$. Stačiojo trikampio ODB statinis $OD = 3\,\text{cm}$, o įžambinė $OB = 6\,\text{cm}$. Vadinasi, $\angle OBD = 30°$, o $\angle BOD = 60°$. Taigi nuopjovos kampas BOC lygus $360° - 120° = 240°$. Pagal Pitagoro teoremą $BD^2 = OB^2 - OD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, $BD = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$.
$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} + S_{\triangle BOC} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 240° + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 24\pi + 9\sqrt{3} = 3(8\pi + 3\sqrt{3})\,(\text{cm}^2)$.

168. $S = 837{,}5 + \frac{1825}{9}\pi \approx 1474{,}22\,\text{cm}^2$. *Nurodymas.* Detalė susideda iš dviejų lygių trapecijų, kurių pagrindai yra 17,5 cm ir 7,5 cm, o aukštinė lygi 33,5 cm, plotų ir dviejų išpjovų, kurių vienos centrinis kampas yra 211°, spindulys lygus 17,5 cm, o kitos — centrinis kampas 149°, o spindulys 7,5 cm.

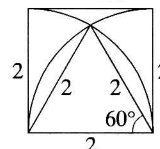
169. a) $64(4-\pi)$ cm²; b) $16(\pi-1)$ dm²; c) $4(3\sqrt{3}-\pi)$ dm²; d) $\frac{9(2\pi-\sqrt{3})}{2}$ m².

170. a) $8(4-\pi)$ cm². *Nurodymas.* Iš kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 8 cm, ploto reikia atimti skritulio, kurio spindulys lygus 4 cm, plotą ir gautą skaičių padalyti iš 2.
b) $32(\pi - 2)$ cm². *Nurodymas.* Iš pusskritulio, kurio spindulys lygus 8 cm, ploto atimkite kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 8 cm, plotą.
c) $50(\pi - 2)$ cm². *Nurodymas.* Iš 4 pusskritulių, kurių spinduliai 5 cm, plotų sumos atimkite kvadrato, kurio kraštinė lygi 10 cm, plotą.
d) $32(\pi - 2)$ cm². *Nurodymas.* Iš skritulio, kurio spindulys lygus 4 cm, ploto atimkite žvaigždutės ✧ plotą. Žvaigždutės plotą gausite iš kvadrato, kurio kraštinė lygi 8 cm, ploto atėmę skritulio, kurio spindulys lygus 4 cm, plotą.

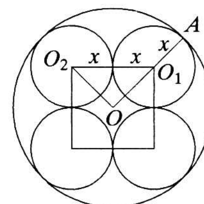
171. Ožkos nuėstas plotas pavaizduotas brėžinyje. Jis susideda iš pusskritulio A, kurio spindulys lygus 5 m, iš dviejų ketvirčių B ir C skritulio, kurio spindulys lygus 4 m, ir dviejų ketvirčių skritulio, kurio spindulys lygus 2 m, be jų bendros dalies D. Taigi ožkos nuėstas plotas lygus:
$S = \frac{25\pi}{2} + 2 \cdot \frac{16\pi}{4} + 2 \cdot \frac{4\pi}{4} - S_D = 22{,}5\pi - S_D.$



Plotas S_D susideda iš 60° išpjovos, kurios spindulys yra 2 m, ir nuopjovos, kurios styga lygi 2 m. $S_{\text{išp}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3}$; $S_{\text{nuop}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.
Taigi $S_D = S_{\text{išp}} + S_{\text{nuop}} = \frac{2\pi}{3} + \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.
Turime: $S = 22{,}5\pi - \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 68{,}2\,(\text{m}^2)$.
Atsakymas. $\approx 68{,}2\,\text{m}^2$.

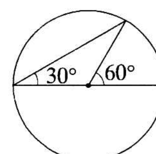


172. a) $OA = 1$ cm. Sakykime, kad laido spindulys yra x cm. Tuomet $OO_1 = OO_2 = 1 - x$. Trikampis O_2OO_1 — statusis. Taigi $(2x)^2 = (1-x)^2 + (1-x)^2$, $x = -1 + \sqrt{2}$. Vadinasi, laidų skersmuo yra $2(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}83$ (cm).
b) $\frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}71$ (cm).

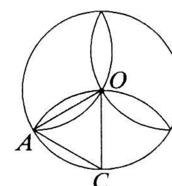


173. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$.
a) $10\sqrt{3}$ cm; b) $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm.

174. a) $3(2\pi + 3\sqrt{3})$ cm. *Nurodymas.* Figūros plotas lygus lygiašonio trikampio, kurio kampai prie pagrindo yra po 30°, o šoninės kraštinės — po 6 cm, ir skritulio išpjovos, kurios kampas 60°, plotų sumai.
b) $9(\pi + 2)$. *Nurodymas.* Figūros plotas lygus stačiojo lygiašonio trikampio, kurio šoninė kraštinė lygi 6 cm, ir skritulio išpjovos, kurios kampas 90°, plotų sumai.
c) $3(4\pi + 3\sqrt{3})$.



175. 1) Pirmiausia pastebėkime, kad „trilapis“ sudarytas iš lankų trijų apskritimų, kurių spinduliai yra 6 cm, o tų apskritimų centrai yra kiekvieno iš trijų duotojo apskritimo lankų viduryje.
2) Pastebėkime, kad apskritimo spindulys OA vieną lapelį dalija į dvi lygias dalis.
3) Pastebėkime, kad vieno lapelio pusės plotas yra lygus skritulio, kurio centras yra taške C nuopjovos plotui (spindulys $CO = CA = 6$ cm).
4) Apskaičiuokime brėžinyje užtušuotos nuopjovos plotą. $\triangle AOC$ — lygiakraštis ($AO = OC = AC = 6$ cm), vadinasi, $\angle ACO = 60°$.
$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} - S_{\triangle AOC} = \frac{\pi \cdot 6^2}{6} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6\pi - 9\sqrt{3} = 3(2\pi - 3\sqrt{3})\,(\text{cm}^2)$.
5) Viso trilapio plotas lygus 6 tokių nuopjovų plotui. Vadinasi,
$S = 6S_{\text{nuop}} = 18(2\pi - 3\sqrt{3})\,(\text{cm}^2)$.



176. a) 2; $2\frac{1}{3}$; b) $11 - 7\sqrt{2}$; $11 + 7\sqrt{2}$.

177. Tokios x reikšmės nėra.

178. $a = 3$; $x_2 = -1$.

179. 4 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm.

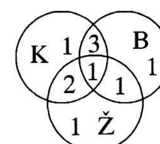
180. a) d_1: $y = 2x$; d_2: $y = 2x - 3$; d_3: $y = -0{,}5x + 2$; d_4: $x = -3$; d_5: $y = -2$.
c) Kadangi tiesė d_4 yra lygiagreti ašiai Oy, tiesė d_5 — ašiai Ox, o ašys Ox ir Oy yra statmenos, tai $d_4 \perp d_5$.
d) Kadangi tiesių d_1 ir d_2 krypties koeficientų k_1 ir k_3 sandauga lygi $2 \cdot (-0{,}5) = -1$, tai šios tiesės yra statmenos.

181. a) LXXXIV; b) XCV; c) MDCCCLXIII; d) MMCDXXIX.

182. a) $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{99}$; c) $\frac{1}{150}$, $\frac{1}{51}$; d) $\frac{1}{3000}$, $\frac{1}{999}$.

183. Jei septyni draugai vidutiniškai turi kiekvienas po 11 Lt, tai jų pinigų suma lygi $7 \cdot 11 = 77$ (Lt). Jei vienas jų turi 8 Lt, tai likę šeši draugai turi $77 - 8 = 69$ (Lt) ir vidutiniškai po $\frac{69}{6} = 11{,}5$ (Lt).
Atsakymas. **B**.

184. 10. Sprendimas akivaizdus iš Oilerio skritulių.



7. RACIONALIOSIOS LYGTYS

Šio skyriaus pagrindinis tikslas yra išmokyti spręsti racionaliąsias lygtis, kuriomis remiamės spręsdami realiojo turinio (paprastai judėjimo ir darbo) uždavinius. Sprendžiant racionaliąsias lygtis tenka atlikinėti veiksmus su racionaliosiomis trupmenomis. Todėl skyriuje prieš racionaliųjų lygčių sprendimą nagrinėjami racionalieji reiškiniai ir jų veiksmai (sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba, kėlimas laipsniu).

Pastabos. 1) Racionaliesiems reiškiniams nėra galimybės skirti daug dėmesio, kaip tai buvo daroma ankstesniais laikais. Tačiau, atsiradus papildomoms pamokoms, verta pasimokyti daugiau, — bus lengviau vienuoliktoje klasėje.

2) Judėjimo bei darbo uždaviniai bus nagrinėjami ir 10 klasėje, mokant spręsti lygčių sistemas, kai viena lygtis netiesinė.

Minimalus lygmuo:

1. Atpažinti racionaliąją lygtį.
2. Gebėti išspręsti *paprasčiausią* racionaliąją lygtį.
3. Gebėti spręsti *paprasčiausius* tekstinius uždavinius, kurie remiasi racionaliųjų lygčių sudarymu ir sprendimu.
4. Žinoti pagrindinę trupmenos savybę ir ja remiantis mokėti prastinti paprastas racionaliąsias trupmenas.
5. Žinoti sąlygą, kada trupmenos reikšmė neturi prasmės.
6. Žinoti sąlygą, kada trupmenos reikšmė lygi nuliui.

Pagrindinis lygmuo:

7. Gebėti atlikti veiksmus (sudėties, atimties, daugybos, dalybos, kėlimo laipsniu) su racionaliosiomis trupmenomis.
8. Gebėti spręsti racionaliąsias lygtis.
9. Gebėti spręsti paprastus judėjimo ir darbo uždavinius.

Aukštesnis lygmuo:

10. Mokėti dviem būdais spręsti racionaliąsias lygtis.
11. Gebėti spręsti sudėtingus judėjimo ir darbo uždavinius.
12. Gebėti atlikti veiksmus su sudėtingomis racionaliosiomis trupmenomis, jas prastinti.

7.1. Racionalieji reiškiniai

Mokiniai jau 7 klasėje yra sutikę racionaliųjų reiškinių bei žino, kad dalyba iš nulio negalima, ir sąlygą, kada trupmena lygi nuliui. Šiame skyrelyje pagrindinis dėmesys turi būti skiriamas pagrindinės trupmenos savybės supratimui ir taikymui bei suvokimui, kada trupmena lygi nuliui, nes tai bus reikalinga sprendžiant racionaliąsias lygtis.

Pastabos. 1) Nereikia skirti daug dėmesio pačiai racionaliojo reiškinio *sąvokai*. Užtenka, kad mokiniai suprastų, jog tai reiškiniai, kuriuose kintamasis (kintamieji) yra trupmenos vardiklyje.

2) Prastinant racionaliąsias trupmenas nereikia nurodyti jų apibrėžimo srities, — sakoma, kad duoti reiškiniai turi prasmę jų apibrėžimo srityje.

Pakartoti:

terminus: raidinis reiškinys, jo reikšmės, kintamasis;
pagrindinę trupmenos savybę;
greitosios daugybos formules.

Išmokti:

kada reiškinys $\frac{a}{b}$ neturi prasmės;
kada reiškinys $\frac{a}{b}$ lygus nuliui;
remiantis pagrindine trupmenos savybe prastinti racionaliuosius reiškinius.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiais nusakoma, kokie reiškiniai vadinami racionaliaisiais.
2. Primenama, kad trupmenos vardiklis negali būti lygus nuliui.
3. Primenama lygios nuliui trupmenos savybė:

$\frac{a}{b} = 0$, kai $a = 0$, $b \neq 0$

4. Pateikiama pagrindinė trupmenos savybė:

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $(c \neq 0)$

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 185–193 pratimai; kartojimui — 194–200. 1–8

185. a) 0; b) 9; c) 5; d) $1\frac{3}{4}$.

186. a) $\frac{3b}{5a}$; b) $-2m$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{6y}{5}$; e) $2m$; f) $\frac{3}{4}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}$.

187. a) $\frac{1}{a-b}$; b) $x+y$; c) $2x-y$; d) $\frac{x+2}{x-2}$; e) 1.

188. a) $\frac{3x+1}{3x+6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{y}{xy-1}$; d) y; e) $\frac{5y}{2}$.

189. a) $5x^2$; b) $x-1$; c) $10+a$; d) $z+4$.

190. a) 0; b) 7; c) -8; d) $-\frac{2}{5}$; e) -10 ir 10; f) -1 ir 1; g) -1 ir 1; h) tokios x reikšmės nėra.

191. Pavyzdžiui: a) $\frac{2x}{x-3}$; b) $\frac{7}{y^2-12y}$; c) $\frac{z^2+1}{(z+2)(z+4)}$; d) $\frac{s^2-4}{(s+1)(s-7)(s-19)}$.

192. a) $x=11$; b) $x=4$.

193. a) 7; b) $-4\frac{1}{2}$; c) -3; d) -1; 0; e) 0; -3; f) -6; 6; g) $-1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; h) tokios x reikšmės nėra; i) -3; j) 1.

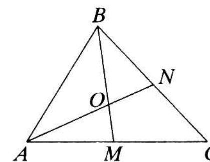
194. 5 cm ir 25 cm.

195. 20 cm. *Nurodymas.* Remkitės savybėmis, kad apskritimo liestinė yra statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką, ir apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra lygios.

196. a) $-1\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$; b) -1; 1.

197. Kadangi panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių santykis yra 3 : 2, tai $k=\frac{3}{2}$. Kadangi panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui, tai $\frac{54}{P}=\frac{3}{2}$ ir $P=36$ (cm).

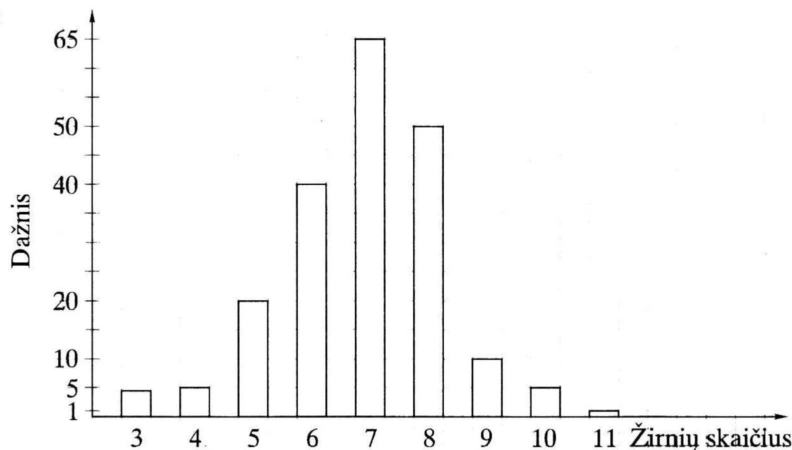
198. *Duota*: $BM=6$ cm, $AN=8$ cm.
Rasti: AO, ON, BO, OM.
Sprendimas. Pagal trikampio pusiaukraštinės savybę $BO{:}OM=2{:}1$. Tuomet $2OM+OM=6$, $OM=2$ cm, $OB=2\cdot 2=4$ (cm).
Kadangi ir $AO:ON=2:1$, tai $2ON+ON=8$, $ON=2\frac{2}{3}$ cm, $AO=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$ (cm).



Atsakymas. 4 cm ir 2 cm; $5\frac{1}{3}$ cm ir $2\frac{2}{3}$ cm.

199. a) $(-5; 3)$; b) $(5; -1)$.

200. a)



b) 1378; c) 200; d) 6,89; e) ≈ 15,02%.

7.2. Racionaliųjų reiškinių sudėtis ir atimtis

Pats skyrelio pavadinimas nusako pagrindinį tikslą — išmokyti sudėti ir atimti racionaliuosius reiškinius. Racionaliosios trupmenos sudedamos ir atimamos taip pat, kaip ir paprastosios trupmenos, todėl mokiniams vertėtų pateikti veiksmų su skaitinėmis trupmenomis pavyzdžių.

Pakartoti:

paprastųjų trupmenų sudėtį ir atimtį;
pagrindinę trupmenos savybę.

Išmokti sudėti ir atimti racionaliuosius reiškinius.

Šiame skyrelyje:

1. Mokoma sudėti ir atimti racionaliąsias trupmenas su vienodais vardikliais:

   $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

   Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį į skliaustus pavyzdžiuose. Pirmame pavyzdyje skliaustų galima nerašyti, o antrame jie yra būtini. Tai dažna mokinių daroma klaida.

2. Mokoma sudėti ir atimti racionaliąsias trupmenas su skirtingais vardikliais:

   $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

3. Pasakoma ir parodoma pavyzdžiais, kad tos pačios taisyklės galioja, kai sudedame ar atimame daugiau negu du racionaliuosius reiškinius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai pratimai yra 201–203, 205–207; kartojimo — 204, 208–219. 9–14

201. a) $\frac{12}{a-3}$; b) $\frac{8}{d+3}$; c) $\frac{2}{v-1}$; d) $\frac{a-6}{a+5}$; e) $\frac{x+10}{6x}$; f) $\frac{3+x}{4x}$; g) $\frac{1}{4}$;
h) $\frac{5-3y}{y+4}$; i) $\frac{c}{a}$.

202. a) $\frac{a+3}{4a}$; b) $\frac{7-x}{12x}$; c) $\frac{23-4a}{4x}$; d) $\frac{2y-1}{y^2-4}$; e) $-\frac{3b+1}{b^2-4}$; f) $\frac{4y}{(y-6)^2}$; g) $\frac{11}{5x-5}$;
h) $\frac{a+1}{6a^2+3a}$; i) $-\frac{10x+25}{x(x^2-25)}$.

203. a) $\frac{xy+1}{x}$; b) $\frac{1-b^2}{b}$; c) $\frac{11a}{4}$; d) $\frac{5b^2-2}{b}$; e) $\frac{12-c}{2}$; f) $\frac{4a-3}{3}$; g) $\frac{x-13y}{4}$;
h) $\frac{3(a-b)}{4}$; i) $\frac{3p+7q}{10}$.

204. a) $\frac{1}{x-y}$; b) $\frac{1}{c+d}$; c) $\frac{1}{5-x}$; d) $\frac{1}{y-4}$; e) $x+7b$; f) $8a-b$; g) $\frac{x+1}{2}$; h) $\frac{4a-3}{4a+3}$.

205. a) $4\frac{1}{3}$; b) 1.

206. $\frac{5a+3}{2a+2} - \frac{7a+4}{3a+3} = \frac{1}{6}$.

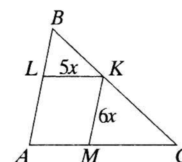
207. a) $\frac{z+7}{3+z} + \frac{3-z}{z-7} = \frac{(z+7)(z-7)+(3-z)(3+z)}{(z-7)(3+z)}$;
b) $\frac{u^2}{u^2-1} - \frac{u+5}{u+1} + 2 = \frac{u^2-(u+5)(u-1)+2(u^2-1)}{u^2-1}$;
c) $\frac{y^2-y}{y^2-25} - \frac{y}{y-5} - 1 = \frac{y^2-y-y(y+5)-(y^2-25)}{y^2-25}$;
d) $\frac{2c}{c^2-16} + \frac{c}{c+4} + \frac{7-c}{c-4} = \frac{2c+c(c-4)+(7-c)(c+4)}{c^2-16}$.

208. a) Apskritimai liečiasi iš išorės;
b) apskritimai neturi bendrų taškų (mažesnysis yra didesniojo viduje);
c) apskritimai neturi bendrų taškų.
Pastaba. Šis uždavinys visiems mokiniams neprivalomas.

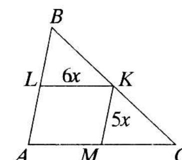
209. 15°.

210. 2,4 dm, 3,2 dm, 4,8 dm.

211. 1) *Duota*: $\triangle ABC$, $AB = 20\,\text{cm}$, $AC = 25\,\text{cm}$, $KM : KL = 6 : 5$.
Rasti: KM ir KL.
Sprendimas. $\triangle ACB \backsim \triangle LKB$, tai: $\frac{5x}{25} = \frac{20-6x}{20}$, $x = 2$.
Tuomet $KM = 6 \cdot 2 = 12\,(\text{cm})$; $KL = 5 \cdot 2 = 10\,(\text{cm})$.



2) *Duota*: $\triangle ABC$, $AB = 20\,\text{cm}$, $AC = 25\,\text{cm}$, $KL : KM = 6 : 5$.
Rasti: KL ir KM.
Sprendimas. $\triangle ACB \backsim \triangle LKB$, tai: $\frac{6x}{25} = \frac{20-5x}{20}$, $x = \frac{100}{49}$.
Tuomet $KM = 5 \cdot \frac{100}{49} = 10\frac{10}{49}\,(\text{cm})$; $KL = 6 \cdot \frac{100}{49} = 12\frac{12}{49}\,(\text{cm})$.



Atsakymas. 10 cm ir 12 cm; arba $12\frac{12}{49}$ cm ir $10\frac{10}{49}$ cm.

212. a) Sprendinių nėra; b) $5-\sqrt{23}$; $5+\sqrt{23}$; c) -1; $2\frac{3}{4}$;
d) $-50-10\sqrt{23}$; $-50+10\sqrt{23}$; e) $\frac{11-\sqrt{61}}{6}$; $\frac{11+\sqrt{61}}{6}$;
f) -7. (*Pastaba.* Sąlygoje vietoj x turėtų būti t.)

213. a) $a(x^2-5x+6)=0$, $a\neq 0$; b) $a(x^2-4x+3\frac{3}{4})=0$, $a\neq 0$;
c) $a(x^2+2x+1)=0$, $a\neq 0$; d) $a(x^2-5\sqrt{3}x+18)=0$, $a\neq 0$.

214. a) 8 cm ir 7 cm; b) 5 cm ir 12 cm.

215. $y=(x-1)^2-9$; parabolės šakos nukreiptos į viršų; viršūnė yra taške, kurio koordinatės yra $(1; -9)$; parabolė x ašį kerta taškuose, kurių koordinatės yra $(-2; 0)$ ir $(4; 0)$; simetrijos ašis — tiesė $x=1$.

216. D.

217. Sakykime, kad meškeriotojas sugavo x karšių. Tada pūgžlių jis sugavo $24-x$. Sprendžiame lygtį $3x+\frac{24-x}{3}=24$, $x=6$.

Atsakymas. 6.

218. Kiškis per 1 minutę nubėga $\frac{500}{2}=250$ (m).
Šuo per 1 minutę nubėga $\frac{1300\cdot 2,13}{5}=553,8$ (m).

I būdas. Per 1 minutę šuo prisiveja kiškį $553,8-250=303,8$ (m). Todėl šuo pavys kiškį per $150\cdot 2,13 : 303,8\approx 1,05$ (min), t. y. maždaug per 1 minutę 3 sekundes.

II būdas. Sprendžiame lygtį: $553,8t=250t+150\cdot 2,13$; $t\approx 1,05$ min, t. y. maždaug 1 min 3 s.

Atsakymas. $\approx$ 1 min. 3 s.

219. Sakykime, kad Karolio pintinėje buvo x grybų, Vyto — y grybų, Andriaus — t grybų, o Povilo — z grybų. Pagal sąlygą $x+2=2t=y-2=\frac{z}{2}$. Turime: $x+2=2t$, $t=\frac{x+2}{2}$; $x+2=y-2$, $y=x+4$; $x+2=\frac{z}{2}$, $z=2x+4$.
Sudarome lygtį: $x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45$, $x=8$.
Tuomet $y=12$, $t=5$ ir $z=20$.

Atsakymas. Karolis turėjo 8 grybus, Vytas — 12 grybų, Andrius — 5 grybus, Povilas — 20 grybų.

Skyrelio tikslas vėlgi labai aiškus — išmokyti dauginti, dalyti ir kelti laipsniu racionaliuosius reiškinius. Čia taip pat nekenktų skaitinių paprastųjų trupmenų pavyzdžiai.

Pakartoti:

paprastųjų trupmenų daugybą, dalybą, kėlimą laipsniu;
laipsnį su sveikuoju neigiamuoju rodikliu;
pagrindinę trupmenos savybę.

Išmokti dauginti, dalyti, kelti laipsniu racionaliuosius reiškinius.

Šiame skyrelyje:

1. Aiškinama, kaip dauginami racionalieji reiškiniai:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

2. Aiškinama, kaip dalijami racionalieji reiškiniai:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

3. Aiškinama, kaip trupmena keliama laipsniu:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį į skliaustų vartojimą pateiktuose pavyzdžiuose.

4. Apibendrinant šiame skyrelyje nagrinėtus racionaliųjų trupmenų veiksmus, pateikiami sudėtingesni pavyzdžiai.

Nurodymas. Nereikia mokinių „kankinti" pateikiant daug ir sudėtingų racionaliųjų reiškinių. Visiškai pakaks vadovėlyje esančių. Tačiau, esant papildomoms pamokoms, verta išspręsti ir sudėtingesnių reiškinių, nes vienuoliktoje klasėje juos prastinti jau reikia mokėti, o ne mokytis. Be to, mokiniai pradeda „jausti" formules, išmoksta jas taikyti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

220–222, 224 ir 228d — teminiai pratimai. Racionaliųjų reiškinių daugybai skirti 220, 224a,b,f,g,h,i,k ir 228d, dalybai — 221, 224c,d,e,j,l, kėlimui laipsniu — 222 pratimai. Spręsdami 223, 225–228a,b,c uždavinius pakartosite racionaliųjų reiškinių prastinimą iškeliant bendrą dauginamąjį prieš skliaustus (223), sudėtį ir atimtį (225, 228a–c), kintamojo reikšmių, su kuriomis trupmena lygi nuliui, nustatymą (226) bei trupmenos reikšmės apskaičiavimą, kai duota kintamojo reikšmė (227). 15–23

220. a) $\frac{3a}{8b}$; b) $\frac{1}{xy}$; c) $\frac{5}{14a}$; d) $\frac{2}{a}$; e) $\frac{nm}{4}$; f) $\frac{15cd}{4}$.

221. a) $\frac{7}{18m}$; b) $5a$; c) $\frac{2}{x}$; d) $8x$; e) $\frac{1}{ab}$; f) ac; g) $\frac{3x}{2a}$; h) $4xy^2$.

222. a) $\frac{a^3}{b^3}$; b) $\frac{y^3}{x^3}$; c) $\frac{x^4y^4}{z^4}$; d) $\frac{a^2}{9b^2}$; e) $\frac{x^2}{36m^2}$; f) $-\frac{1000x^6}{n^6p^3}$; g) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{y^2}$;
h) $\frac{b^6}{a^2+2ab+b^2}$.

223. a) $\frac{3a}{b}$; b) $\frac{1}{a}$; c) $\frac{y+x}{x}$; d) $\frac{5}{a-2}$; e) $\frac{5}{x}$; f) $a-2$; g) $\frac{a+3}{3}$; h) $-\frac{1}{3}$.

224. a) $ab-b^2$; b) $\frac{a^2+ab}{3}$; c) $\frac{x-y}{2}$; d) 1; e) $\frac{x}{2}$; f) $\frac{2}{b-c}$; g) $\frac{x+y}{x}$; h) $\frac{3c^2}{2a}$;
i) $\frac{a-b}{a}$; j) $\frac{a-5}{2}$; k) $\frac{x^2-y^2}{4x+8}$; l) $\frac{c+d}{c}$.

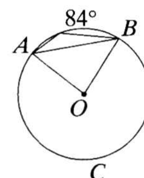
225. a) $\frac{3}{y-4}$; b) $\frac{4y}{x^2-y^2}$; c) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$; d) $\frac{2x^2}{x-1}$; e) $\frac{2x}{x^2-4}$; f) $\frac{5a}{a-1}$.

226. a) -2; 2; b) $1\frac{1}{2}$; c) 5; d) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; e) 5.

227. **C**.

228. a) **A**; b) **B**; c) **A**; d) **C**.

229. Iš kurio lanko AB taško bežiūrėtume, stygą AB matytume kampu, kuris lygus įbrėžtiniam kampui, besiremiančiam į lanką ACB. Kadangi įbrėžtinis kampas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo, tai stygą matytume $\frac{360°-84°}{2}=138°$ kampu. Jei žiūrėtume iš taškų A arba B, tai matytume tik tašką.

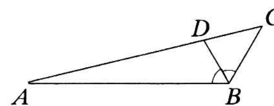


230. a) $S_{išp}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha=\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 67{,}5}{360}=\frac{3\pi}{16}=0{,}58875\ldots\approx 0{,}59\ (\text{cm}^2)$;
b) $S_{išp}=\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 15{,}75}{360}=\frac{7\pi}{160}=0{,}137375\ldots\approx 0{,}14\ (\text{cm}^2)$.

231. a) 0; b) 0; 5; c) -1; 3; d) 0; $\frac{1}{2}$; e) 0; $1\frac{1}{2}$; f) -2; 2;
g) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; h) sprendinių nėra; i) -2; $\frac{1}{3}$; j) sprendinių nėra;
k) $\frac{1}{3}$; l) $4-\sqrt{17}$; $4+\sqrt{17}$.

232. Duotoji atkarpa nuo pagrindų nutolusi nevienodai. Ji yra arčiau ilgesniojo pagrindo. *Nurodymas*. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį ir palyginkite su duotos atkarpos ilgiu.

233. *Duota*: $\triangle ABC$, $\angle ABD = \angle DBC$, $AD : DC = 8$, $AB = 16\,\text{cm}$.
Rasti: BC.
Sprendimas. Taikome trikampio kampo pusiaukampinės savybę: $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$; $BC = \frac{AB \cdot DC}{AD}$. Kadangi $\frac{AD}{DC} = 8$, tai $\frac{DC}{AD} = \frac{1}{8}$. Tuomet $BC = \frac{16}{8} = 2\,(\text{cm})$.
Atsakymas. 2 cm.



234. a) -3; 0; b) -1; 3; c) -1; 1.

235. $3m - 2n = 0{,}8(5m + n)$, $m = -2{,}8n$. Tuomet
$\frac{m^2-2mn}{n^2} = \frac{(-2{,}8n)^2-2\cdot(-2{,}8n)\cdot n}{n^2} = \frac{7{,}84n^2+5{,}6n^2}{n^2} = \frac{13{,}44n^2}{n^2} = 13{,}44.$
Atsakymas. **B**.

236. 102,0096 t. (*Pastaba*. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad reikia suvienodinti matavimo vienetus.)

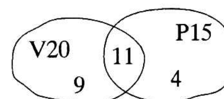
237. **C**.

238.

Reiškinys	$-2x+3$			$-\frac{x^2}{3}$			x^2+2x-1		
x reikšmė	-1	0	10,5	$-\frac{1}{3}$	0	9	-2	0	3
Reiškinio reikšmė	5	3	-18	$-\frac{1}{27}$	0	-27	-1	-1	14

239. 1040 g.

240. Kadangi abiejų kalbų mokosi 11 mokinių, tai tik vokiečių kalbos mokosi $20 - 11 = 9$ mokiniai; tik prancūzų kalbos mokosi $15 - 11 = 4$ mokiniai. Tuomet nesimoko šių kalbų $27 - (11 + 9 + 4) = 3$ mokiniai.
Sprendimas akivaizdus ir iš Oilerio skritulių: $27 - (9 + 11 + 4) = 3$. (Žr. 11 skyriaus 1 skyrelį.)



7.4. Racionaliosios lygtys

Tai labai svarbus skyrelis. Pagrindiniai tikslai yra du:

1) išmokyti spręsti racionaliąsias lygtis;
2) išmokyti spręsti realiojo turinio uždavinius, kurie remiasi racionaliųjų lygčių sprendimu.

Racionaliąsias lygtis galima spręsti dvejaip:

1) naikinant į lygtį įeinančių trupmenų vardiklius, t. y. abi lygties puses dauginant iš bendrojo tų trupmenų vardiklio;
2) suteikiant lygčiai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pastabos. 1) Kuris būdas yra geresnis, tesprendžia patys mokytojai ir mokiniai. Tik pastebėsime, kad racionaliųjų *nelygybių* sprendimą lengviau įsisavinti bus tiems mokiniams, kurie gerai supras antrąjį racionaliųjų lygčių sprendimo būdą.

2) Skaičiavimai, kuriuos tenka atlikti sprendžiant racionaliąsias lygtis, yra sudėtingesni negu sprendžiant tiesines ir kvadratines lygtis. Todėl čia mokiniai gali klysti dažniau. Patarkite mokiniams gautus lygties sprendinius tikrinti.

3) Tekstinio uždavinio atveju papildomai reikia tikrinti, ar gauti lygties sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą.

4) Racionaliąsias lygtis dažniausiai gauname spręsdami vadinamuosius darbo ir judėjimo uždavinius. Nereikia stengtis pateikti labai daug ir sunkių uždavinių — visiškai pakaks vadovėlyje esančių. 10 klasėje nagrinėjant lygčių sistemas, kurių viena lygtis netiesinė, vėl bus mokoma spręsti tokius uždavinius.

Pakartoti:

ką vadiname lygties sprendiniu;
kvadratinės lygties sprendimą;
sąlygą, kada trupmena lygi nuliui;
racionaliųjų trupmenų sudėtį ir atimtį;
kelio ir darbo formules.

Išmokti:

atpažinti ir išspręsti racionaliąją lygtį;
spręsti tekstinius judėjimo ir darbo uždavinius.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas realiojo turinio (darbo) uždavinys, kurį sprendžiant gaunama racionalioji lygtis. Ta lygtis išsprendžiama naikinant vardiklius.

   Nurodymas. Šiam uždaviniui skirkite daug dėmesio. Galima mokiniams pateikti skaitinių pavyzdžių siekiant išsiaiškinti, kad atliktas darbas A lygus darbo kiekio n, atlikto per laiko vienetą (darbo našumo), ir laiko t, per kurį atliktas visas darbas, sandaugai, t. y. $A = n \cdot t$. Ši formulė yra analogiška geriau mokiniams žinomai kelio formulei $s = v \cdot t$.

2. Lygtis, gauta sprendžiant tekstinį uždavinį, išsprendžiama kitu būdu, t. y. suteikiant pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad lygties sprendiniai yra du skaičiai. Tuo tarpu tekstinio uždavinio sąlygą tenkina tik vienas tos lygties sprendinys. Todėl prieš pateikiant atsakymą, būtina pasitikrinti.

3. Pasakoma, kokios lygtys vadinamos racionaliosiomis, ir pateikiami jų sprendimo algoritmai.

4. Pagal vieną iš pateiktų algoritmų išsprendžiamas racionaliosios lygties pavyzdys.

   Nurodymas. Pagal antrąjį algoritmą tą lygtį turėtų išspręsti patys mokiniai. Paklauskite mokinių, kuris sprendimo būdas jiems priimtinesnis.

Pastabos. 1) Praktika rodo, kad geriau yra spręsti antruoju būdu, nes vėliau, sprendžiant racionaliąsias nelygybes, iškyla problemų: mokiniai daugina iš bendrojo vardiklio taip prarasdami sprendinius.

2) Esant galimybei, naudinga išspręsti keletą tokių lygčių, kur gautos nežinomojo reikšmės ne visada tenkina duotąją lygtį. Sprendžiant reikėtų lavinti mokinių pastabumą, ieškoti racionalesnių pertvarkių. Pavyzdžiai:

1) $\frac{1}{x-1} + \frac{9}{2x+8} + \frac{x+1}{2-2x} = 0$. *Atsakymas.* 5.

Spręsti verta grupuojant pirmąjį ir trečiąjį dėmenis:
$\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{2-2x} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{2-x-1}{2(x-1)} = \frac{1-x}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}$.
Tada: $\frac{9}{2x+8} = \frac{1}{2}$, $x = 5$.

2) $\frac{2}{x+2} + \frac{3,5}{x+3} = \frac{2}{x^2+5x+6}$. *Atsakymas.* Sprendinių nėra.

Pastebėkite, kad $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$. Tuomet gauname lygtį $\frac{2(x+3)+3,5(x+2)}{x^2+5x+6} = \frac{2}{x^2+5x+6}$, $2(x+3) + 3,5(x+2) = 2$ ir $x = -2$. Ši reikšmė netinka, nes su ja trupmenos $\frac{2}{x+2}$ vardiklis lygus nuliui.

3) $\frac{x^2-5x}{x^2-7x+10} = \frac{6}{(x-5)(2-x)}$. *Atsakymas.* 3.
$\frac{x^2-5x}{(x-2)(x-5)} = \frac{-6}{(x-2)(x-5)}$.

4) $\frac{5-2x^2}{(x+2)(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$. *Atsakymas.* 1.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai pratimai yra 241–254. Pagrindinė jų dalis (243–252) skirta racionaliosioms lygtims sudaryti iš realaus turinio sąlygos ir spręsti. Čia būtų galima išskirti judėjimo (243–248), iš kurių 245–247 — judėjimo upe, ir darbo (249–252) uždavinius. 241 pratimas skirtas įgūdžiams formuoti bendravardiklinant trupmenas, o 242, 253 ir 254 — racionaliosioms lygtims spręsti. 255–261 — kartojimui skirti pratimai. 26–42

241. a) $\frac{4x-3}{x(x-3)}$; b) $\frac{5x-10}{x(x-5)}$; c) $\frac{x}{x^2-16}$; d) $\frac{4}{5-b}$.

242. a) 3,5; b) −3; 10; c) −15; 10; d) sprendinių nėra; e) −1,5; 5; f) $-\frac{1}{5}$; g) 2; 3; h) $3-\sqrt{17}$; $3+\sqrt{17}$; i) 12.

243. Sakykime, kad antrojo automobilio greitis yra x km/h. Tuomet pirmojo automobilio greitis yra $(x+10)$ km/h. Kadangi atstumas tarp miestų yra 560 km, tai pirmasis važiavo $\frac{560}{x+10}$ h, o antrasis — $\frac{560}{x}$ h. Kadangi pirmasis atvažiavo viena valanda anksčiau už antrąjį, tai gauname lygtį: $\frac{560}{x}-\frac{560}{x+10}=1$; $x_1=-80$ (netinka), $x_2=70$. Vadinasi, antrojo automobilio greitis yra 70 km/h, o pirmojo $70+10=80$ (km/h).
Atsakymas. 80 km/h ir 70 km/h.

244. Sakykime, kad vieno lėktuvo greitis yra x km/h. Tuomet kito lėktuvo greitis yra $(x+80)$ km/h. Pirmasis lėktuvas skrido $\frac{1600}{x}$ h, o antrasis — $\frac{1600}{x+80}$ h. Kadangi antrasis lėktuvas atskrido 1 valanda anksčiau už pirmąjį, tai gauname lygtį: $\frac{1600}{x}-\frac{1600}{x+80}=1$; $x_1=-400$ (netinka), $x_2=320$.
Atsakymas. Vieno lėktuvo greitis yra 320 km/h, o kito — 400 km/h.

245. Sakykime, kad katerio greitis stovinčiame vandenyje yra x km/h. Kateris pasroviui plaukia $(x+3)$ km/h, o prieš srovę — $(x-3)$ km/h greičiu. Plaukdamas pasroviui kateris sugaišo $\frac{5}{x+3}$ h, prieš srovę — $\frac{12}{x-3}$ h, ežeru — $\frac{18}{x}$ h. Kadangi plaukiant pasroviui ir prieš srovę sugaišta lygiai tiek pat laiko, kiek būtų reikėję plaukiant ežeru, tai gauname lygtį: $\frac{5}{x+3}+\frac{12}{x-3}=\frac{18}{x}$; $x_1=-6$ (netinka), $x_2=27$.
Atsakymas. Katerio greitis stovinčiame vandenyje yra 27 km/h.

246. Sakykime, kad valties greitis stovinčiame vandenyje yra x km/h. Valties greitis pasroviui yra $(x+2)$ km/h, o prieš srovę — $(x-2)$ km/h. Pasroviui valtis plaukė $\frac{45}{x+2}$ h, o prieš srovę — $\frac{22}{x-2}$ h. Kadangi iš viso valtis plaukė 5 h, tai gauname lygtį: $\frac{45}{x+2}+\frac{22}{x-2}=5$; $x_1=\frac{2}{5}$ (netinka), $x_2=13$.
Atsakymas. Valties greitis stovinčiame vandenyje yra 13 km/h.

247. Sakykime, kad upės tėkmės greitis yra x km/h. Prieš srovę žvejys plaukė $(6-x)$ km/h greičiu ir užtruko $\frac{9}{6-x}$ h. Srovė jį atnešė atgal per $\frac{9}{x}$ h. Iš viso jis sugaišo 8 h, tad gauname lygtį: $\frac{9}{6-x}+\frac{9}{x}=8$; $x_1=1\frac{1}{2}$, $x_2=4\frac{1}{2}$.
Atsakymas. Upės tėkmės greitis yra $1\frac{1}{2}$ km/h arba $4\frac{1}{2}$ km/h.

248. Sakykime, kad dviratininkas iš vietovės A į vietovę B važiavo x km/h greičiu. Tuomet jis užtruko $\frac{27}{x}$ h. Iš kelionės dviratininkas grįžo $(x-2)$ km/h greičiu ir užtruko $\frac{20}{x-2}$ h. Kadangi grįždamas dviratininkas užtruko 12 min $=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ h trumpiau, tai gauname lygtį: $\frac{27}{x}-\frac{20}{x-2}=\frac{1}{5}$; $x_1=10$, $x_2=27$.
Atsakymas. Dviratininkas važiavo 10 km/h arba 27 km/h greičiu.

249. Sakykime, kad per vieną dieną ūkininkai pagal planą turėjo suarti x ha. Tuomet 600 ha jie turėjo suarti per $\frac{600}{x}$ dienų. Tačiau per dieną suardavo po $(x+5)$ ha ir suarė $600+30=630$ (ha). Tam jie sugaišo $\frac{630}{x+5}$ dienų ir baigė darbą 1 diena anksčiau nustatyto laiko. Gauname lygtį: $\frac{600}{x}-\frac{630}{x+5}=1$; $x_1=-75$ (netinka), $x_2=40$.
Atsakymas. Pagal planą ūkininkai per dieną turėjo suarti 40 ha.

250. Sakykime, kad dirbdama atskirai antroji grupė liniją nutiestų per x h. Tada pirmoji dirbdama atskirai tą liniją nutiestų per $(x+3)$ h. Per 1 h pirmoji grupė atliktų $\frac{1}{x+3}$ darbo dalį, o antroji — $\frac{1}{x}$ darbo dalį. Pirmoji grupė per 10 h atliko $\frac{10}{x+3}$ darbo dalį. Po 8 h pirmoji grupė atliko $\frac{8}{x+3}$ darbo dalį, o antroji — $\frac{8}{x}$ darbo dalį. Kadangi buvo atliktas visas darbas, tai gauname lygtį: $\frac{10}{x+3}+\frac{8}{x+3}+\frac{8}{x}=1$; $x_1=-1$ (netinka), $x_2=24$.
Atsakymas. Pirmoji grupė dirbdama atskirai nutiestų liniją per 27 h, o antroji — per 24 h.

251. Sakykime, kad antroji brigada dirbdama atskirai sandėlį gali pastatyti per x dienų. Tada pirmoji brigada dirbdama atskirai tą sandėlį pastatytų per $(x+3)$ dienas. Per 1 dieną pirmoji brigada atliktų $\frac{1}{x+3}$ darbo dalį, o antroji — $\frac{1}{x}$ darbo dalį. Per 5 dienas pirmoji brigada atliko $\frac{5}{x+3}$ darbo dalį, o antroji — $\frac{5}{x}$ darbo dalį. Per 3 dienas antroji brigada atliko $\frac{3}{x}$ darbo dalį. Kadangi buvo atliktas visas darbas, tai gauname lygtį: $\frac{5}{x+3}+\frac{5}{x}+\frac{3}{x}=1$; $x_1=-2$ (netinka), $x_2=12$.
Atsakymas. Pirmoji brigada dirbdama atskirai galėtų atlikti darbą per 15 dienų, o antroji — per 12 dienų.

252. Sakykime, kad meistras pagal planą per valandą turėjo pagaminti x detalių. Tuomet 120 detalių pagaminti jis sugaišo $\frac{120}{x}$ h. Tačiau per valandą meistras pagamindavo $(x+2)$ detales ir 136 detalėms pagaminti sugaišo $\frac{136}{x+2}$ h, o tai yra 3 h trumpiau, negu buvo numatyta. Gauname lygtį: $\frac{120}{x}-\frac{136}{x+2}=3$; $x_1=-13\frac{1}{3}$ (netinka), $x_2=6$.
Atsakymas. Pagal planą meistras per valandą turėjo pagaminti 6 detales.

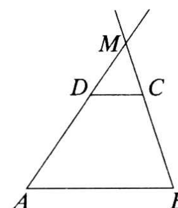
253. $x_1=-1$, $x_2=43$.

254. $y_1=4$, $y_2=9\frac{2}{3}$.

255. $\approx 21{,}5°$. *Nurodymas*. Geležinkelio bėgių posūkio lanko didumą laipsniais galima apskaičiuoti išsprendus lygtį $\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1200\cdot\alpha}{360}=450$.

256. Taisyklingojo n-kampio vidaus kampų suma lygi $180°(n-2)$; vieno kampo didumas yra $\frac{180°(n-2)}{n}$.
Atsakymas. a) $144°$; b) $150°$; c) $165{,}6°$.

257. *Pastaba*. Sąlygoje yra korektūros klaida. Turi būti:
a) $AD:DM=17:19$; b) $AD:DM=4$.
Sprendimas. Iš panašiųjų trikampių AMB ir DMC turime: $\frac{AM}{DM}=\frac{BM}{CM}$.
Kadangi $AM=AD+DM$, o $BM=BC+CM$, tai $\frac{AD+DM}{DM}=\frac{BC+CM}{CM}$;
$\frac{AD}{DM}+1=\frac{BC}{CM}+1$; $\frac{AD}{DM}=\frac{BC}{CM}$.



a) Kadangi $\frac{AD}{DM}=\frac{17}{9}$, tai $\frac{BC}{CM}=\frac{17}{9}$. Pagal sąlygą $CB-CM=1{,}6$ m, tai $CM=CB-1{,}6$. Tuomet $9BC=17(CB-1{,}6)$ ir $CB=3{,}4$ m.
b) Kadangi $\frac{AD}{DM}=4$, tai $\frac{BC}{CM}=4$. Pagal sąlygą $CM=CB-1{,}6$. Tuomet $BC=4(CB-1{,}6)$ ir $CB=2\frac{2}{15}$ m.

258. **D**.

259. 127.

260. 33,1%.

261. a) $5+1=6$; $6+2=8$; $8+3=11$; $11+4=15$; $15+5=20$; $20+6=26$; $26+7=33$; $33+8=41$; $41+9=50$ ir t. t.
b) $2+1=3$; $3\cdot 2=6$; $6+1=7$; $7\cdot 2=14$; $14+1=15$; $15\cdot 2=30$; $30+1=31$; $31\cdot 2=62$; $62+1=63$ ir t. t.
Atsakymas. a) 33, 41, 50; b) 31, 62, 63.

8. TIKIMYBĖS. KOMBINATORIKA. STATISTIKA

Skyriuje nagrinėjami trys esminiai dalykai:

- pateikiamas klasikinis tikimybės apibrėžimas ir tikimybės savybės (8.1 ir 8.2 skyreliai);
- mokoma rasti rinkinių skaičių remiantis galimybių medžiu, daugybos ir sudėties taisyklėmis (8.3 ir 8.4 skyreliai);
- aiškinama koreliacijos sąvoka — mokoma nustatyti, ar tiriami du požymiai apytikriai yra tiesiškai priklausomi (ar tie požymiai yra teigiamai ar neigiamai koreliuoti, ar tarp jų koreliacijos nėra) (8.6 skyrelis).

Nurodymai. 1) Klasikinio tikimybės apibrėžimo įvedimui buvo ruošiamasi 8 klasėje, kur mokiniai susipažino su šiomis sąvokomis: bandymo baigtis, atsitiktinis įvykis, būtinasis ir negalimasis įvykiai, vienodai tikėtini, labiau tikėtinas ir mažiau tikėtinas įvykiai. 9 klasėje šios sąvokos nagrinėjamos išsamiau.

2) Ieškant įvykių tikimybių reikia suskaičiuoti, kiek iš viso yra elementariųjų įvykių ir kiek yra nagrinėjamam įvykiui palankių elementariųjų įvykių. Dažnai skaičiavimus palengvina galimybių medis, daugybos taisyklė.

3) Tikimybės suvokimui labai svarbus ir praktiškai naudingas yra 8.5 skyrelis. Čia supažindinama su statistiniu tikimybės apibrėžimu: kai bandymų skaičius didelis, santykinis įvykio dažnis artėja prie to įvykio tikimybės, t. y. **P**(įvykio) $\approx$ f(įvykio).

4) Svarbiausi skyriuje yra 8.1 ir 8.4 skyreliai.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti apskaičiuoti atsitiktinio įvykio tikimybę, kai elementarieji įvykiai yra vienodai galimi (remiantis klasikiniu įvykio tikimybės apibrėžimu).
2. Gebėti apskaičiuoti, kiek yra galimybių pasirinkti *daiktų porą*, kai vienas daiktas imamas iš vienos aibės, o kitas — iš kitos (remiantis daugybos taisykle). Gebėti apskaičiuoti, kiek yra galimybių pasirinkti *daiktą*, kai daiktas imamas arba iš vienos, arba iš kitos aibės (aibės neturi bendrų elementų).
3. Suvokti, kad, atlikus bandymą daug kartų, su bandymu susieto įvykio santykinis dažnis bus artimas jo tikimybei.
4. Suprasti koreliacijos sąvoką ir pateikti konkrečių pavyzdžių.

Pagrindinis lygmuo:

5. Žinoti vienas kitam priešingų įvykių tikimybių savybę ir mokėti ja remtis sprendžiant uždavinius.
6. Ieškant rinkinių skaičiaus remtis galimybių medžiu.
7. Gebėti apskaičiuoti (remiantis daugybos ir sudėties taisyklėmis), kiek yra galimybių pasirinkti keleto daiktų rinkinį, kai daiktai imami iš tos pačios aibės.
8. Suvokti, kad nežinoma įvykio tikimybė apytiksliai lygi santykiniam įvykio dažniui, kai bandymų skaičius yra didelis.
9. Gebėti nustatyti, ar tarp pateiktų dviejų požymių yra tiesinė koreliacija.

Aukštesnis lygmuo:

10. Suprasti sąvokas: elementarusis įvykis, atsitiktinis įvykis, būtinasis įvykis, negalimasis įvykis.
11. Žinoti ir mokėti įrodyti tikimybės savybes.

8.1. Įvykio tikimybė

Su atsitiktinio įvykio tikimybe mokiniai susipažino 6 klasėje (Matematika ir pasaulis, 6 klasė, 229–234 p.) ir 8 klasėje (Matematika 8, I dalis, 6 skyrius, 4–5 skyreliai).

Šiame skyrelyje apibendrinamos turėtos žinios ir pateikiamas klasikinis tikimybės apibrėžimas.

Svarbiausia šiame skyrelyje išmokyti apskaičiuoti atsitiktinio įvykio tikimybę, kai elementarieji įvykiai yra vienodai galimi.

Pakartoti:

su monetos ir lošimo kauliuko mėtymu susijusius bandymus ir su tais bandymais susijusių atsitiktinių įvykių tikėtinumą;
sąvokas — bandymo baigtis, atsitiktinis įvykis, labiau (mažiau) tikėtinas įvykis;
paprastosios trupmenos prasmę.

Išmokti:

paaiškinti, kas yra elementarieji įvykiai;
nustatyti bandymo visų galimų elementariųjų įvykių skaičių;
nustatyti nagrinėjamam įvykiui palankių įvykių skaičių;
suformuluoti ir taikyti klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą.

Šiame skyrelyje:

1. Pirmas šio skyrelio puslapis (82 p.) skirtas kartojimui ir sąvokų *atsitiktinis įvykis*, *elementarusis įvykis* įtvirtinimui. Tai daroma nagrinėjant mokiniams gerai žinomus monetos ir kauliuko mėtymo bandymus.

   Nurodymai. 1) Svarbiausia, kad mokiniai suprastų, kokius įvykius vadiname elementariaisiais:

   > *Elementariaisiais įvykiais vadinami tokie atsitiktiniai įvykiai, kurių negalima suskaidyti į smulkesnius atsitiktinius įvykius.*

   Formuojant šią sąvoką siūlome remtis įvykiais, susijusiais su lošimo kauliuko mėtymu.

   2) Įvykiai, kuriuos sudaro keli elementarieji įvykiai, vadinami sudėtiniais, bet šis žodis vadovėlyje nevartojamas, kalbama apie su bandymu susijusius neelementariuosius įvykius.

   3) Labai svarbu, kad mokiniai mokėtų nustatyti bandymo visų galimų elementariųjų įvykių skaičių ir nagrinėjamam įvykiui palankių elementariųjų įvykių skaičių (pavyzdžiui, vienus ir kitus surašant), — tai leidžia apskaičiuoti įvykio tikimybę.

2. Antras ir trečias šio skyrelio puslapiai (83, 84 p.) skirti atsitiktinio įvykio tikimybei apibrėžti ir parodyti, kad skaičiuojant ir palyginant to paties bandymo tikimybes galima nustatyti, kuris įvykis yra tikėtinesnis.

   Nurodymai. 1) Reikia siekti, kad mokiniai suvoktų, kam skaičiuojamos įvykių tikimybės. Reikia pabrėžti, kad, pavyzdžiui, sverdami ir palygindami daiktų masę nustatome, kuris iš jų sunkesnis, matuodami ir palygindami daiktų ilgius nustatome, kuris daiktas ilgesnis. O štai apskaičiavę ir palyginę įvykių tikimybes nustatome, kuris nagrinėjamo bandymo įvykis yra tikėtinesnis (t. y. kartojant bandymą daug kartų įvyks dažniau).

   2) Svarbu, kad mokiniai suvoktų, ką parodo įvykio tikimybė. Pavyzdžiui, tikimybė, kad metant monetą atsivers herbas, lygi $\frac{1}{2}$. Tai nereiškia, kad metant monetą du kartus vieną kartą atsivers herbas. Tai tik reiškia, kad metant monetą labai daug kartų apie pusę kartų moneta atvirs herbu. Sakykime, jeigu mesime monetą 100 kartų, tai herbų skaičius nedaug nukryps nuo 50. Metant kauliuką tikimybė atsiversti, pavyzdžiui, penkioms akutėms lygi $\frac{1}{6}$. Tai visiškai nereiškia, kad metant kauliuką 6 kartus penkios akutės atsivers vieną kartą ar kad metant kauliuką daug kartų kas šeštą kartą atvirs penkios akutės. Tai tik reiškia, kad metant kauliuką, pavyzdžiui, 600 kartų apie 100 kartų atvirs penkios akutės. Mokinių galima paklausti, kokių rezultatų galima tikėtis metant monetą ar kauliuką, pavyzdžiui: 6000 kartų, 60 000 kartų ir panašiai.

   3) Reikalaukite, kad silpnesnieji mokiniai skaičiuodami įvykio tikimybę laikytųsi tokios tvarkos:
   - nustatomas visų elementariųjų įvykių skaičius n,
   - randamas palankių nagrinėjamam įvykiui elementariųjų įvykių skaičius m,
   - apskaičiuojama įvykio tikimybė pagal formulę $\mathbf{P}(\text{įvykio}) = \frac{m}{n}$.

   4) Svarbu, kad mokiniai suprastų šio skyrelio teorinės dalies pabaigoje išspręstą uždavinį.

   5) Pagrindinėje mokykloje nenagrinėjami atvejai, kai bandymo baigtys (elementarieji įvykiai) nėra vienodai galimos. Bet svarbu pabrėžti, kad ne visada taip būna. Pavyzdžiui, kai moneta sulankstyta ar kauliuko masės centras nesutampa su jo geometriniu centru, tai klasikinio tikimybės apibrėžimo taikyti negalima.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

262–273 — teminiai uždaviniai. Jie parinkti taip, kad visų galimų elementariųjų įvykių skaičiaus radimas nesudarytų papildomų sunkumų. Dažniausiai įmanoma visus elementariuosius įvykius surašyti. Juos surašius nesunku nustatyti nagrinėjamam įvykiui palankių elementariųjų įvykių skaičių ir tada apskaičiuoti įvykio tikimybę. 3 ir 4 skyreliuose bus mokoma apskaičiuoti elementariųjų įvykių skaičių sudėtingesniais atvejais. Tam pasitarnaus galimybių medis ir daugybos taisyklė.
274–280 — kartojimo uždaviniai.

1–12, 14

262. Metant lošimo kauliuką gali įvykti vienas iš 6 elementariųjų įvykių: atvirto 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės. Taigi visų galimų elementariųjų įvykių skaičius lygus 6, t. y. $n = 6$.
a) Įvykiui A yra palankus vienas elementarusis įvykis (atvirto 3 akutės), t. y. $m = 1$. Todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$;
b) $m = 3$ (atvirto 2, 4 arba 6 akutės); $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
c) $m = 4$ (atvirto 1, 2, 3 arba 4 akutės); $\mathbf{P}(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;
d) $m = 3$ (atvirto 4, 5 arba 6 akutės); $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
e) $m = 3$ (atvirto 2, 3 arba 5 akutės); $\mathbf{P}(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

263. Čia atsitiktinis įvykis, kurio tikimybę skaičiuosime, nepažymėtas raide. Verta tą padaryti: pažymėkime raide M įvykį, kad atsitiktinai pakviestas atsakinėti mokinys bus mergaitė.
Žodis „atsitiktinai“ šiame uždavinyje reiškia, kad kiekvienas mokinys turi vienodai galimybių būti pakviestas atsakinėti (tai būtų galima atlikti užrašius mokinių pavardes ar jų numerius žurnale ant lapelių. Lapelius suglamžyti ir suspausti į rutuliukus, o rutuliukus gerai išmaišyti). Taikome tikimybės apibrėžimą su $n = 14 + 10 = 24$, $m = 14$; $\mathbf{P}(M) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

264. Uždavinys panašus į 263, bet turi ir skirtumų. Jei savaime aišku, kad visi mokiniai yra skirtingi, kad „pažymėti“ juos galima, pvz., vardais, tai kaip su rutuliais, kurie yra vienodo didumo? Iš tikrųjų ir rutulius galima (bent jau mintyse) sunumeruoti: numeriais nuo 1 iki 15 — baltus rutulius ir numeriais nuo 1 iki 12 — juodus rutulius. Tada, pavyzdžiui, įvykį, kad bus ištrauktas 7-tas baltas rutulys, galima pažymėti b_7, o įvykį, kad bus ištrauktas 7-tas juodas rutulys — j_7. Turime elementariuosius įvykius: $b_1, b_2, \ldots, b_{15}, j_1, \ldots, j_{12}$. Tuomet iš viso turime $15 + 12 = 27$ vienodai galimus elementariuosius įvykius, t. y. $n = 27$.
a) A — ištrauktas rutulys yra baltas; $m = 15$, nes yra 15 palankių elementariųjų įvykių; $\mathbf{P}(A) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$;
b) B — ištrauktas rutulys yra juodas; $m = 12$, nes yra 12 palankių elementariųjų įvykių; $\mathbf{P}(B) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.

265. Turime $7 + 4 + 5 = 16$ elementariųjų įvykių, t. y. $n = 16$.
a) A — ištrauktas kamuoliukas yra raudonas; $m = 7$; $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{16}$;
b) B — ištrauktas kamuoliukas yra geltonas; $m = 4$; $\mathbf{P}(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;
c) C — ištrauktas kamuoliukas yra mėlynas; $m = 5$; $\mathbf{P}(C) = \frac{5}{16}$;
d) D — ištrauktas kamuoliukas yra žalias; $m = 0$, nes krepšyje žalių kamuoliukų nėra. Todėl $\mathbf{P}(D) = \frac{0}{16} = 0$.

Uždavinys analogiškas 264 uždaviniui. Jį galima skirti savarankiškam ar namų darbui.

266. Kadangi panašią lentelę mokiniai jau yra pildę 8 klasėje (510 uždavinys), galima nurodyti jiems iš anksto užpildyti šią bei 269 uždavinio lentelę, kur skaičiuojama atvirtusių akučių suma (dar galima pridėti lentelę su atvirtusių akučių sandauga — toks uždavinys pateiktas uždavinyne). Patogu, kad mokiniai lenteles turėtų nusibraižę ant atskiro lapo ir galėtų prireikus jomis naudotis kiekvieną kartą jų nebraižydami (panašiai kaip parabolės šablonu).
Atkreipkime mokinių dėmesį — uždavinio sąlygoje nurodyta, kad metami du *skirtingų spalvų* kauliukai. Šiuo atveju visos bandymo baigtys (i, j), kur i yra raudono kauliuko atsivertusių akučių skaičius, o j — pilko kauliuko atsivertusių akučių skaičius, yra vienodai galimos. Sakykime, kad kauliukai nenuspalvinti (visiškai vienodi) ir išmetus negalima atskirti, kuris iš jų kuria puse atvirto, t. y. mes negalime atskirti, pavyzdžiui, elementariųjų įvykių $(2, 5)$ ir $(5, 2)$.
Tada, laikant įvykį „vienas kauliukas atsivertė 2, o kitas 5 akutėmis“ elementariuoju, jis turės daugiau galimybių įvykti nei, pavyzdžiui, įvykis „abu kauliukai atsivertė 2 akutėmis“, t. y. tokie elementarieji įvykiai nėra vienodai galimi. Taigi neatskyrę kauliukų negalime sudaryti vienodai galimų elementariųjų įvykių aibės. (Žr. pastabą paraštėje.)

Pastaba. Spręsdami 20 uždavinį iš uždavinyno turime kauliukus mintyse pasižymėti, pvz., nuspalvinti ar sunumeruoti, nes sąlygoje nenurodyta, kad kauliukai yra skirtingi.

Kai metami skirtingi (skirtingų spalvų) kauliukai, tai, pvz., įvykiai (1, 2) ir (2, 1) yra skirtingi, nes pirmu atveju 1 bus ant vieno („pirmosios“ spalvos) kauliuko, o antru atveju — ant kito.

a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) Iš lentelės matome, kad iš viso yra 36 vienodai galimi elementarieji įvykiai. Įvykiui A palankus vienas elementarusis įvykis (6, 6). Todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{36}$.
Įvykiui B palankūs 9 elementarieji įvykiai: (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6), todėl $\mathbf{P}(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
Įvykiui C palankūs 9 elementarieji įvykiai: (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), todėl $\mathbf{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
Įvykiui D palankūs 6 elementarieji įvykiai: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), todėl $\mathbf{P}(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Įvykiui E palankūs 11 elementariųjų įvykių: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), todėl $\mathbf{P}(E) = \frac{11}{36}$.

267. Patarkite mokiniams abėcėlės tvarka surašyti visus elementariuosius įvykius: ALO, AOL, LAO, LOA, OAL, OLA ($n = 6$). Tik vieninteliu atveju gausime žodį OLA. Taigi $m = 1$. Todėl $\mathbf{P}$(sudėtas žodis OLA) $= \frac{1}{6}$.

268. Surašykime visus galimus elementariuosius įvykius abėcėlės tvarka: *hhh*, *hhs*, *hsh*, *shh*, *ssh*, *shs*, *hss*, *sss*. Taigi $n = 8$.
$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{8}$ (įvykiui A palankūs 3 elementarieji įvykiai: *ssh*, *shs*, *hss*);
$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{8}$ (įvykiui B palankūs 3 elementarieji įvykiai: *hhs*, *hsh*, *shh*);
$\mathbf{P}(C) = \frac{1}{8}$ (įvykiui C palankus 1 elementarusis įvykis *hhh*);
$\mathbf{P}(D) = \frac{1}{8}$ (įvykiui D palankus 1 elementarusis įvykis *sss*);
$\mathbf{P}(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (įvykiui E palankūs 4 elementarieji įvykiai: *hhs*, *hsh*, *shh*, *hhh*).

269. a)

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

b) $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$; $\mathbf{P}(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
c) Pvz., F — suma yra pirminis skaičius; $\mathbf{P}(F) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

270. Visų elementariųjų įvykių skaičius $n = 30$.
a) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{30}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{15}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(E) = \frac{1}{3}$.
b) Šią užduotį galima skirti namų darbams.

271. Uždavinys skirtas elementariųjų įvykių skaičiui rasti. Mokytojas gali papildyti užduotį — suformuluoti keletą su aprašytaisiais bandymais susijusių įvykių ir apskaičiuoti jų tikimybes.
a) Monetos atsivertimą žymėkime s ir h, kauliuko — 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tuomet visus galimus elementariuosius įvykius patogu surašyti taip: $(1, s)$, $(1, h)$, $(2, s)$, $(2, h)$, $(3, s)$, $(3, h)$, $(4, s)$, $(4, h)$, $(5, s)$, $(5, h)$, $(6, s)$, $(6, h)$.
Iš viso yra 12 elementariųjų įvykių.
b) Galima atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad pirmasis skritulys padalytas į 4 *lygias* dalis, o antrasis — į 3 *lygias* dalis. Tikimybės sustoti rodyklei

bet kuriame sektoriuje yra proporcingos sektorių plotui. Iš viso yra 12 elementariųjų įvykių: $A1$, $A2$, $A3$, $B1$, $B2$, $B3$, $C1$, $C2$, $C3$, $D1$, $D2$, $D3$.

c) Iš viso yra 6 elementarieji įvykiai: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

272. Nebūtinai.

273. Tik šis vienintelis pratimas skirtas aptarti, ar bandymų baigtys (elementarieji įvykiai) yra vienodai galimos.

a) Taip, jei kortelės visiškai vienodos;

b) ne, nes sektorių plotai nelygūs — skritulys padalytas į nelygias dalis;

c) taip, jei sektorių plotai būtų lygūs, t. y. jei skritulys padalytas į lygias dalis. Iš brėžinio atrodo, kad 3, 4, 7, 8 sektorių plotai didesni už 1, 2, 5, 6, tai baigtys nėra vienodai galimos.

274. 7 skyriaus 4 skyrelyje aptartas racionaliųjų lygčių sprendimas dviem būdais. Jei su mokiniais aptarėte abu, čia jie gali pasirinkti arba vieną iš jų, arba dalį pratimų spręsti vienu būdu, dalį — kitu.

a) $x = 1\frac{1}{2}$ (randame tas x reikšmes, su kuriomis trupmenos skaitiklis lygus nuliui, ir patikriname, ar su gautąja x reikšme vardiklis nelygus nuliui);

b) $x = -1$; c) $x = 2\frac{1}{3}$; d) $x = 2$.

Trupmena $\frac{2x-3}{4-x}$ neturi prasmės, kai vardiklis lygus nuliui, t. y. kai $x = 4$.

275. a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2a+a^2}$; d) $\frac{1}{3b-b^2}$.

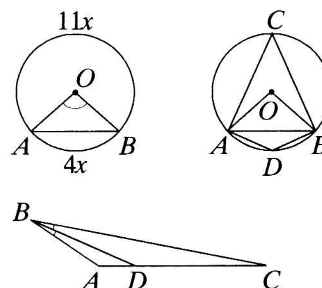
276. a) $\smile AB = \frac{4}{15} \cdot 360° = 96°$; $\angle AOB = 96°$.

Pastaba. Čia galima įžvelgti ir antrą centrinį kampą ($360° - 96° = 254°$), besiremiantį į stygą AB.

b) Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į stygą AB, yra du:

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\smile AB = \frac{1}{2} \cdot 96° = 48°$;

$\angle ADB = \frac{1}{2}\smile ACB = \frac{1}{2} \cdot (360° - 96°) = 132°$.



277. Pažymėkime $AD = x$. Tada $DC = x + 10$. Pagal trikampio kampo pusiaukampinės savybę: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, $\frac{2}{7} = \frac{x}{x+10}$, $x = 4$. $AC = AD + DC = x + x + 10 = 4 + 4 + 10 = 18$ (cm).

Atsakymas. 18 cm.

278. Taškas O pasislinks tiek pat, kiek ir taškas M, t. y. $\frac{3}{4}$ apskritimo ilgio. Taigi skritulio centras pasislinks $21{,}98 \cdot \frac{3}{4} = 16{,}485$ (cm).

Atsakymas. 16,485 cm.

279. a) *I būdas.* Jei tiesė eina per tašką, tai to taško koordinatės turi tenkinti duotosios tiesės lygtį (t. y. įrašę į tiesės lygtį koordinačių reikšmes gausime teisingas lygybes).

Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} -2k + b = 3, \\ 3k + b = -2; \end{cases}$ $k = -1$, $b = 1$.

Taigi tiesės, einančios per duotus taškus A ir B, lygtis yra $y = -x + 1$.

II būdas. $k = \frac{3-(-2)}{-2-3} = -1$, $y = -x + b$, $3 = 2 + b$, $b = 1$.

Atsakymas. $y = -x + 1$.

b) *I būdas.* Lygties $x^2 - 5x + 4 = 0$ sprendinius nesunku atspėti pagal atvirkštinę Vijeto teoremą: $D = 9 > 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Tuomet naujos lygties sprendiniai bus 2 ir 8 ($1 \cdot 2 = 2$; $4 \cdot 2 = 8$). Jų suma yra 10, o sandauga — 16. Taigi naujoji lygtis bus $a(x^2 - 10x + 16) = 0$, $a \neq 0$.

II būdas. Duotoji lygtis turi sprendiniu, nes $D = 9 > 0$. Pagal teoremą, atvirkštinę Vijeto teoremai $x_1 + y_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 4$. Tegul naujosios lygties šaknys yra t_1 ir t_2. Kadangi $t_1 = 2x_1$, o $t_2 = 2x_2$, tai $t_1 + t_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 10$, o $t_1 \cdot t_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 16$, tai naujoji lygtis yra $a(t^2 - 10t + 16) = 0$, $a \neq 0$ arba $a(x^2 - 10x + 16) = 0$, $a \neq 0$.

Atsakymas. a) $y = -x + 1$; b) $a(x^2 - 10x + 16) = 0$, $a \neq 0$.

280. $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots + 50$.

I būdas. Pastebėkime, kad $1 + 2 - 3 = 0$; $-4 + 5 = 1$, $6 - 7 = -1$; $-8 + 9 = 1$; $10 - 11 = -1$; ir t. t. Taigi kiekvienų keturių iš eilės einančių skaičių, pradedant (-4), suma lygi 0.

Nuo 4 iki 50 yra 47 skaičiai. Atmetę paskutinius 3 skaičius gausime 11 ketvertų. Jų suma lygi 0, o paskutiniųjų trijų skaičių suma bus $-48 + 49 + 50 = 51$.

II būdas. Pastebėkime, kad $2 - 3 - 4 + 5 = 6 - 7 - 8 + 9 = 10 - 11 - 12 + 13 = \dots = 46 - 47 - 48 + 49 = 0$ (tokių skaičių ketvertų yra $48 : 4 = 12$) Taigi reiškinio reikšmė $1 + 0 \cdot 12 + 50 = 51$.

Atsakymas. E.

8.2. Tikimybės savybės

Iš visų skyrelyje nagrinėjamų tikimybės savybių praktiškai naudingiausia yra vienas kitam priešingų įvykių tikimybių savybė. Ja patogu remtis sprendžiant kai kuriuos uždavinius. Nors šis skyrelis ir nėra labai reikšmingas, bet tikimybės supratimui jis svarbus. Be to, suprasti teorinę medžiagą turėtų būti nesunku ir patiems silpniausiems mokiniams.

Nurodymai. 1) Siekite, kad mokiniai tikimybės savybes mokėtų užrašyti formulėmis ir nusakyti žodžiais.
2) Pagrindines tikimybės savybes patogu nagrinėti remiantis su kauliuko mėtymu susijusiais bandymais.

Pakartoti:

kada neneigiamoji paprastoji trupmena lygi 0, kada lygi 1; kada ji mažesnė už 1, kada — didesnė už 1;
koks įvykis vadinamas būtinuoju;
koks įvykis vadinamas negalimuoju;
klasikinį tikimybės apibrėžimą.

Išmokti:

pagrindines tikimybės savybes;
nusakyti žodžiais įvykį, priešingą duotajam.

Šiame skyrelyje:

1. Apskaičiuojamos dviejų su kauliuko mėtymu susijusių atsitiktinių įvykių — būtinojo ir negalimojo — tikimybės ir įrodomos dvi tikimybės savybės:

> *Negalimojo įvykio tikimybė lygi* 0.
> *Būtinojo įvykio tikimybė lygi* 1.

Nurodymai. 1) Patikrinti, ar mokiniai gerai suprato šias savybes, siūloma atliekant užduotį. Papildomai galima paprašyti mokinių nurodyti pateiktų įvykių tikimybes. (Vadovėlyje šioms savybėms įtvirtinti skirti 288D,E, 289D bei 290c pratimai.)

2) Su būtinojo ir negalimojo įvykio sąvokomis mokiniai susipažino 8 klasėje (Matematika 8, I dalis, 6 skyrius, 4 skyrelis).

2. Įrodoma dar viena tikimybės savybė:

> *Bet kurio įvykio tikimybė yra neneigiamas, ne didesnis už* 1 *skaičius.*

Nurodymas. Pradedant nagrinėti šią savybę mokinių galima paprašyti nurodyti su kauliuko mėtymu susijusį įvykį, kurio tikimybė būtų neigiamas skaičius ar skaičius, didesnis už vienetą. Mokiniai lengvai suvokia, kad tokių įvykių nėra.

3. Įvedama sąvoka įvykiui A *priešingas* įvykis ir jo žymėjimas ($\overline{A}$). Remiantis su kauliuko mėtymu susijusiu įvykiu A — „atvirto daugiau kaip 2 akutės“ parodoma:

- kaip riestiniuose skliaustuose galima surašyti nagrinėjamam įvykiui palankius elementariuosius įvykius ($A = \{3, 4, 5, 6\}$); surašomi tam įvykiui priešingo įvykio elementarieji įvykiai ($\overline{A} = \{1, 2\}$);
- apskaičiuojamos įvykių A ir $\overline{A}$ tikimybės;
- pastebima, kad $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$.

Nurodymas. Verta pastebėti, kad įvykius A ir $\overline{A}$ sudarančių elementariųjų įvykių visuma yra nagrinėjamo bandymo *visi* elementarieji įvykiai, o įvykiuose A ir $\overline{A}$ nėra pasikartojančių elementariųjų įvykių.

4. Įrodoma vienas kitam priešingų atsitiktinių įvykių tikimybių savybė:

> *Įvykio ir jam priešingo įvykio tikimybių suma lygi 1.*

Nurodymas. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog žinant įvykio A tikimybę jam priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybę galima apskaičiuoti remiantis formule: $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

281–290 uždaviniai — teminiai. Jie skirti tikimybių savybėms taikyti kartu prisimenant ir klasikinį tikimybės apibrėžimą. 291–299 pratimai — kartojimo. 13, 18–21

281. a) 0,17; b) 0,94; c) 0,976; d) $\frac{6}{7}$; e) $\frac{13}{18}$; f) $\frac{1}{12}$.

282. Vidmantas teisus, nes įvykio tikimybė $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$. Vadinasi, ji negali būti didesnis už 1 ($\frac{7}{6}$) ar neigiamas ($-\frac{1}{3}$) skaičius.

283. Atkreipkite dėmesį į uždavinio klausimą: kurie teiginiai yra *tikrai neteisingi*?
a) Teiginys gali būti teisingas, nes $\mathbf{P}(A) = \frac{16}{17} < 1$.
b) Tikrai neteisingas, nes $\mathbf{P}(B) = \frac{19}{18} > 1$.
c) Tikrai neteisingas, nes $\mathbf{P}(C) < 0$.
d) Kadangi $\mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(\overline{D}) = 0{,}256 + 0{,}744 = 1$, tai teiginys tikrai teisingas.
e) Kadangi $\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(\overline{E}) = \frac{2}{11} + 0{,}18 = \frac{2}{11} + \frac{9}{50} = \frac{100+99}{550} = \frac{199}{550} \neq 1$, tai teiginys tikrai neteisingas.
f) Kadangi $\mathbf{P}(\overline{F}) + \mathbf{P}(F) = 0{,}8 + 0{,}02 = 0{,}82 \neq 1$, tai teiginys tikrai neteisingas.
g) Kadangi $\mathbf{P}(\overline{G}) + \mathbf{P}(G) = \frac{17}{121} + \frac{104}{121} = \frac{121}{121} = 1$, tai teiginys tikrai teisingas.

284. a) Šie įvykiai yra vienas kitam priešingi, todėl tikimybė, kad studentas egzamino neišlaikys, lygi $1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$.
b) Analogiškai: $1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

285. $\overline{A}$ — atvirto nelyginis akučių skaičius;
$\overline{B}$ — atvirto ne mažesnis už 4 skaičius;
$\overline{C}$ — atvirto ne 4 (atvirto skaičius, nelygus 4);
$\overline{D}$ — atvirto didesnis už 4 skaičius.

286. $\overline{A}$ — ištrauktas kubelis yra ne mėlynas (arba: $\overline{A}$ — ištrauktas kubelis yra raudonas arba baltas); $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{2}$;
$\overline{B}$ — ištrauktas ne baltas (raudonas arba mėlynas) kubelis; $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{7}$; $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{5}{7}$;
$\overline{C}$ — ištrauktas ne raudonas (mėlynas arba baltas) kubelis; $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{14}$; $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{11}{14}$;
$\overline{D}$ — ištrauktas kubelis yra baltas; $\mathbf{P}(D) = \frac{5}{7}$; $\mathbf{P}(\overline{D}) = \frac{2}{7}$.

287. Patogu papildyti lentelę taip:

Klasė	IX	X	XI	XII	Iš viso
Mergaitės	40	36	34	31	141
Berniukai	32	38	30	35	135
Iš viso	72	74	64	66	276

$\mathbf{P}(A) = \frac{47}{92}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{45}{92}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{35}{276}$, $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{241}{276}$;
$\mathbf{P}(C) = \frac{16}{69}$, $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{53}{69}$.
Pirmiausia verta apskaičiuoti $\mathbf{P}(\overline{D})$: $\mathbf{P}(\overline{D}) = \frac{6}{23}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{17}{23}$;
$\mathbf{P}(E) = \frac{3}{23}$, $\mathbf{P}(\overline{E}) = \frac{20}{23}$; $\mathbf{P}(F) = \frac{73}{138}$, $\mathbf{P}(\overline{F}) = \frac{65}{138}$.

288. Sprendžiant šį uždavinį verta pasinaudoti 269 uždavinio lentele. Tuomet nereikės gaišti laiko sudarant lentelę.
$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{18}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{13}{18}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{36}$, $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{31}{36}$;
$\mathbf{P}(C) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{5}{6}$; $\mathbf{P}(D) = 1$, $\mathbf{P}(\overline{D}) = 0$;
$\mathbf{P}(E) = 0$, $\mathbf{P}(\overline{E}) = 1$.

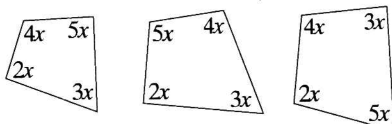
289. Surašykime visus elementariuosius įvykius: 56, 57, 65, 67, 75, 76 ($n = 6$).
$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{3}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{2}{3}$;
$\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(D) = 1$, $\mathbf{P}(\overline{D}) = 0$.

290. Pirmiausia reikia išspręsti nelygybę, o po to nustatyti, kiek yra kortelių, kuriose užrašyti skaičiai yra tos nelygybės sprendiniai (iš viso 11 kortelių).
a) $4x - 5 < 15$, $x < 5$. Pažymėkime įvykį A — ant kortelės užrašytas skaičius yra duotosios nelygybės sprendinys. Įvykiui A yra palankios 5 baigtys (ištraukta kortelė, ant kurios parašyta 0; 1; 2; 3; 4) iš 11 galimų, todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{11}$;
b) $3x + 4 < 20$, $x < 5\frac{1}{3}$; $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{11}$;
c) $-5x - 3 < 12$, $x > -3$; $\mathbf{P}(A) = \frac{11}{11} = 1$;
d) $-x + 1 > -9$, $x < 10$; $\mathbf{P}(A) = \frac{10}{11}$.

291. a) $\frac{x}{3y}$; b) $\frac{2}{x+5y}$; c) $\frac{y+3}{y-3}$; d) $\frac{x-8}{x-3}$.

292. a) -3; -2; b) $-2{,}5$; 3.

293. Sprendžiant šį uždavinį reikėtų prisiminti, kad keturkampio vidaus kampų suma lygi 360°. Po to silpnesniems mokiniams reikėtų pasiūlyti remiantis duotais kampų didumų santykiais apskaičiuoti to keturkampio kampus. Ir galiausiai remiantis įbrėžtinio keturkampio kampų savybe nustatyti, ar yra reikiamas keturkampis.
a) Apskaičiuokime keturkampio kampų didumus.
$2x + 4x + 5x + 3x = 360°$, $x = \frac{180°}{7}$;
$\frac{360°}{7}$, $\frac{720°}{7}$, $\frac{900°}{7}$, $\frac{540°}{7}$.
Kadangi $\frac{360°}{7} + \frac{900°}{7} = \frac{720°}{7} + \frac{540°}{7} (= 180°)$, tai apie duotąjį keturkampį galima apibrėžti apskritimą, kai kampas $\frac{360°}{7}$ yra priešais kampą $\frac{900°}{7}$ (analogiškai — kampas $\frac{720°}{7}$ priešais kampą $\frac{540°}{7}$).

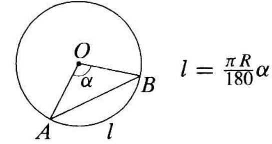


Nurodymai. 1) Kadangi sąlygoje kampų didumų santykiai nurodyti ne didėjimo tvarka, tai galima sakyti, kad jie nurodyti iš eilės. Todėl išeitų, kad minėtieji kampai yra vienas priešais kitą ir apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą.
2) Stipresnieji mokiniai turėtų pastebėti esant lengvesnį sprendimą: kadangi $2 + 5 = 4 + 3$, tai apie tokį keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

b) Analogiškai sprendžiamas ir šis punktas. Kadangi $5 + 8 \neq 7 + 9$, tai apskritimo apibrėžti negalima. Beje, net jeigu kampų didumai nurodyti ne iš eilės, apibrėžti apskritimo vis tiek negalima: kadangi suma $5+8+7+9$ nelyginė, tai neįmanoma jos perskelti pusiau.

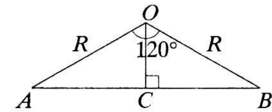
Šio uždavinio su silpnais mokiniais nenagrinėkite.

294. a) Kai $\alpha = 60°$, tai $\triangle AOB$ — lygiakraštis (lygiašonis trikampis, kurio vienas kampas lygus 60°, yra lygiakraštis).
Tada $R = AB = 7\,\text{cm}$, $C = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$. Tuomet $l = \frac{14\pi}{360} \cdot 60 = \frac{7\pi}{3}$ (cm).

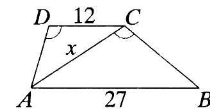


b) Kai $\alpha = 90°$, tai $\triangle AOB$ — status lygiašonis. Todėl $R^2 + R^2 = 7^2$, $R = \frac{7\sqrt{2}}{2}$; $C = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}\pi$; $l = \frac{7\sqrt{2}\pi}{360} \cdot 90 = \frac{7\sqrt{2}}{4}\pi$ (cm).

c) Kai $\alpha = 120°$, tai $\angle A = \angle B = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
$BC = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5\,(\text{cm})$; $OC = \frac{R}{2}$ — statinis prieš 30° kampą.
Iš stačiojo $\triangle OCB$ pagal Pitagoro teoremą:
$3{,}5^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$; $C = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}\pi}{3}$;
$l = \frac{14\sqrt{3}\pi}{3 \cdot 360} \cdot 120 = \frac{14\sqrt{3}}{9}\pi$ (cm).



295. *Duota*: $ABCD$ — trapecija, $AB \parallel DC$, $\angle ADC = \angle ACB$, $AB = 27\,\text{cm}$, $DC = 12\,\text{cm}$.
Rasti: AC.
Sprendimas. $\angle ACD = \angle CAB$ (vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių AB ir DC bei kirstinės AC), $\angle ACB = \angle ADC$ (duota), tai $\triangle ADC \backsim \triangle ACB$ (pagal 3 kampus).
Sudarome proporciją: $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{AC}$, $\frac{x}{27} = \frac{12}{x}$; $x = 18$.
Atsakymas. 18 cm.



296. a) $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4) + 1 = (x+2)^2 + 1$.

b) Funkcijos $f(x) = (x+2)^2 + 1$ grafikas — parabolė, kurios šakos eina aukštyn. Viršūnės koordinatės yra $(-2; 1)$. Tiesė $x = -2$ — simetrijos ašis.

c) Funkcijos reikšmės didėja intervale $(-2; +\infty)$, mažėja intervale $(-\infty; -2)$.

297. a) $(30 : 5) \cdot (2 - 4^2)$; b) $30 : (5 \cdot 2) - 4^2$;
c) $30 : (5 \cdot 2 - 4^2)$; d) $30 : (5 \cdot (2 - 4^2))$.

298. Pirmą kartą apeidamas Sigitas nutrynė visus nelyginius skaičius (paskutinį — 99, todėl antrą ratą jis pradės trinti skaičius nuo 4).

Sąlygoje vietoje žodžio *nubraukęs* geriau sakyti *nutrynęs*.

Po pirmo apėjimo lieka:
2, 4, 6, 8, 10, ..., 90, 92, 94, 96, 98.
Antrą kartą apeidamas Sigitas nutrins visus dalius iš 4 skaičius (paskutinį — 96, todėl trečią ratą jis pradės trindamas 2).
Po antro apėjimo lieka:
2, 6, 10, 14, 18, ..., 90, 94, 98.
Trečią kartą apeidamas jis nutrins 2 ir kitus skaičius kas 8 (paskutinį — 98, todėl ketvirtą ratą jis pradės nutrindamas 14).
Po trečio apėjimo lieka:
6, 14, 22, 30, ..., 86, 94.
Ketvirtą kartą apeidamas jis nutrins 14 ir kitus skaičius kas 16 (paskutinį — 94, todėl penktą ratą jis pradės nutrindamas 22).
Po ketvirto apėjimo lieka:
6, 22, 38, 54, 70, 86.
Po penkto apėjimo lieka:
6, 38, 70.
Po šešto apėjimo lieka:
6, 70.
Po septinto lieka 70.
Atsakymas. Lieka skaičius 70.

299. **B**.

8.3. Galimybių medis

Galimybių medis — tai kombinatorinės daugybos taisyklės schema. Braižant galimybių medžius kartais patogu būna surašyti ir suskaičiuoti visus bandymo elementariuosius įvykius. Tai dažnai palengvina įvairių kombinatorikos uždavinių sprendimą.

Nurodymas. Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad loginė jungtis „ir“ atitinka daugybos veiksmą, ir taip formuoti kombinatorinės daugybos taisyklės sampratą.

Pakartoti:

įvykio tikimybės apibrėžimą;

vienas kitam priešingųjų įvykių tikimybių sumos formulę:

$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$.

Išmokti:

braižyti galimybių medžius;

remtis galimybių medžiais ieškant elementariųjų įvykių skaičiaus.

Šiame skyrelyje:

1. Sprendžiant 1 pavyzdį detaliai aiškinama, kaip braižomas galimybių medis.

   Nurodymai. 1) Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad pavyzdyje kalbama apie bandelės *ir* gėrimo pasirinkimą, o viršūnių skaičius rodo, kiek skirtingų tokių porų galima sudaryti.

   2) Atkreipkite mokinių dėmesį į sąvokas: medžio šaka, medžio viršūnė — jų skaičius parodo, kiek yra pasirinkimo galimybių.

   3) Atlikę klaustuku pažymėtą užduotį pastebėkite, kad medžio šakų ir viršūnių skaičius nepasikeitė.

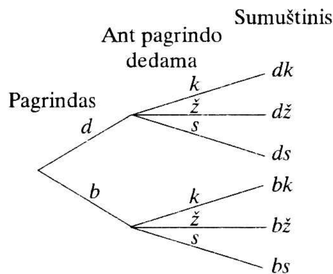
   4) Tai labai svarbus pavyzdys. Juo bus remiamasi ir kitame skyrelyje aiškinant daugybos taisyklę.

2. Antras pavyzdys panašus į pirmąjį, tik čia renkamės ne porą, o trejetą. Mums reikia išsiaiškinti, kiek skirtingų galimybių turi Miglė praleisti savaitgalį, t. y. *ir* penktadienį, *ir* šeštadienį, *ir* sekmadienį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

300–313 — teminiai uždaviniai. Spręsdami šiuos uždavinius mokiniai turės ne tik nubraižyti galimybių medžius, bet ir sugebėti jais pasinaudoti skaičiuodami įvykių tikimybes (308–313). Kai kuriuos uždavinius (309, 310) galima spręsti ir nenaudojant galimybių medžio, o iš karto surašant visas galimybes, nors surašydami mąstome panašiai kaip ir braižydami galimybių medį. Braižydami galimybių medžius, vartosime sutrumpinimus — dažniausiai pirmąsias elementų, apie kuriuos kalbama, pavadinimų raides. 314–319 — kartojimo uždaviniai. 22–29

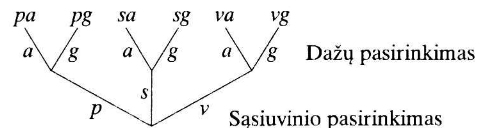
300. Sumuštinis – tai pagrindas *ir* tai, ką dedame ant pagrindo.
Pagrindas: *d* (duona) arba *b* (batonas).
Ant pagrindo dėsime: *k* (kumpis), ž (žuvis) arba *s* (sūris).
Braižome galimybių medį. Nesvarbu, ar medžio „šaknys“ bus kairėje lapo pusėje, ar lapo viršuje, ar apačioje.



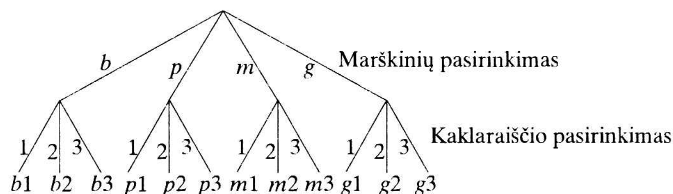
Suskaičiuojame, kad iš viso yra 6 viršūnės ($2 \cdot 3 = 6$). Taigi Julės mama galėjo pagaminti 6 skirtingų rūšių sumuštinius.

301. Piešimo sąsiuvinis: *p* (plonas), *s* (storas), *v* (vidutinis-pusstoris); dažai: *a*, *g*.

Sąsiuvinio *ir* dažų pasirinkimai:
6 galimybės ($3 \cdot 2 = 6$).



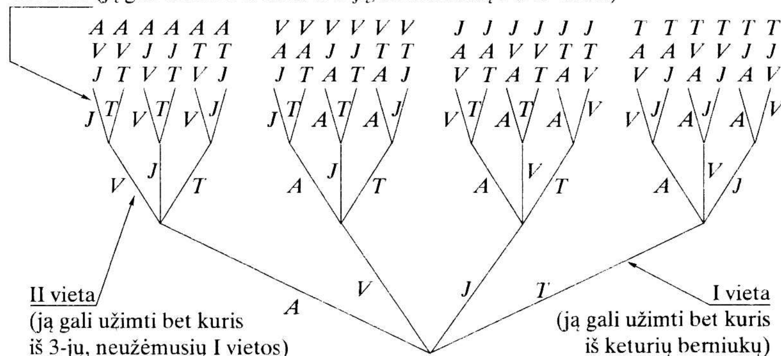
302. Marškiniai: b, p, m, g; kaklaraiščiai: 1, 2, 3.
Marškinių *ir* kaklaraiščio pasirinkimai:



Iš viso yra $4 \cdot 3 = 12$ galimybių pasirinkti marškinius ir kaklaraištį.

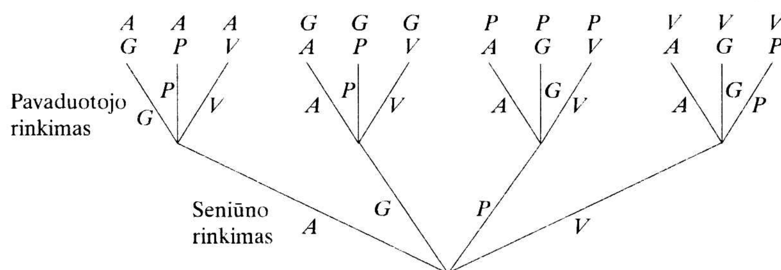
303. Šis ir 304 uždavinys skiriasi nuo prieš tai buvusių tuo, kad čia antrą ar trečią komponentę renkamės iš to paties rinkinio. Antros komponentės pasirinkimas priklausys nuo to, kaip buvo pasirinkta pirma, o trečios — nuo pirmųjų dviejų pasirinkimo.
Turime išsiaiškinti, kiek skirtingų galimybių pasiskirstyti 1 *ir* 2, *ir* 3 vietas turi A, V, J, T.

Pastaba. Galima iš pradžių spręsti 304 uždavinį, o po to — 303.

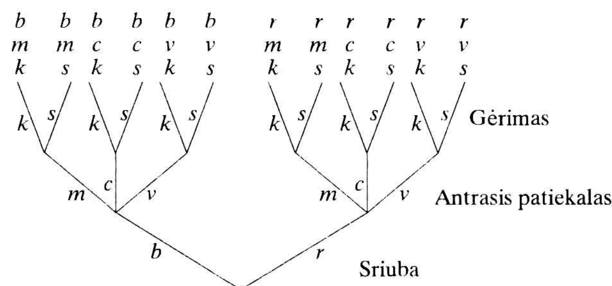


Iš viso yra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ galimybės pasiskirstyti 1–3 vietas.
Pastaba. Galima sudaryti ir kitą uždavinį: iš pradžių pavaizduoti, kaip gali būti paskirstytos 1–3 vietos, jei rungiasi trys dalyviai, pvz., Antanas, Valdas ir Jonas. Tada iš viso bus 6 galimybės — medis bus mažesnis ir jį bus lengviau pavaizduoti.

304. A, G, P, V — iš jų renkamas klasės seniūnas *ir* pavaduotojas.



305. Rimas renkasi *ir* sriubą, *ir* antrąjį patiekalą, *ir* gėrimą.



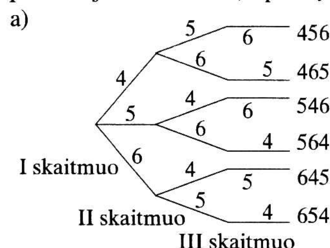
Iš viso yra $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ galimybių.

306. I trimestras — P, K, Z; II trimestras — A, R; III trimestras — N, M.
Nurodymas. Galima pasiūlyti mokiniams pabandyti surašyti visas galimybes ir nebraižant galimybių medžio, bet pasinaudojant medžių sudarymo logika.
PAN, PAM, PRN, PRM,
KAN, KAM, KRN, KRM,
ZAN, ZAM, ZRN, ZRM.

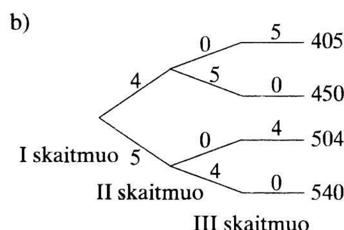
307. Šį uždavinį mokiniai nesunkiai išspręstų ir be galimybių medžio. Bet pageidautina, kad bent vieną skaičiaus sudarymo uždavinį mokiniai išspręstų braižydami galimybių medį. Svarbu, kad jie įsisąmonintų, jog sudaryti skaičių — reiškia parinkti jo skaitmenis (*ir* pirmą, *ir* antrą, *ir* trečią ...)

Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad šiame uždavinyje skaitmenys skaičiuje nesikartoja.

a)



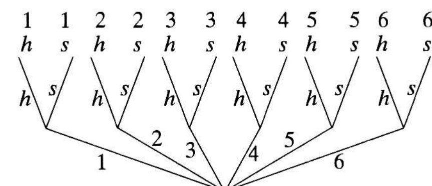
b)



Pastaba. Atkreipkime mokinių dėmesį, kad pirmasis skaitmuo negali būti lygus 0.

Atsakymas. a) 6 skaičiai; b) 4 skaičiai.

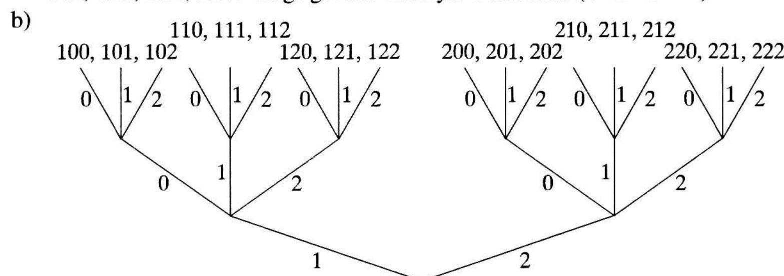
308. Lošimo kauliukas: 1, 2, 3, 4, 5, 6; moneta: h, s.



Iš viso yra 12 elementariųjų įvykių, t. y. $n = 12$.
a) $m = 1$, **P**(atvirto 5 akutės ir herbas) $= \frac{1}{12}$;
b) $m = 2$, **P**(atvirto 6 akutės) $= \frac{1}{6}$;
c) $m = 6$, **P**(atvirto herbas) $= \frac{1}{2}$.

309. Čia mokiniai patys turi sudaryti uždavinio sprendimo modelį. Pirmiausia reikia nustatyti visų baigčių skaičių — geriausia jas surašyti:
123, 132, 213, 231, 312, 321; $n = 6$.
a) $m = 2$, **P**(ant kortelės užrašytas skaičius yra lyginis) $= \frac{1}{3}$;
b) $m = 4$, **P**(ant kortelės užrašytas skaičius yra nelyginis) $= \frac{2}{3}$.

310. a) Galima spręsti nebraižant galimybių medžio. Surašykime visas baigtis: 102, 120, 201, 210. Taigi galima sudaryti 4 skaičius ($2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$).
b)



Iš viso galima sudaryti 18 skaičių ($2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$).

311. a) 16 $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16)$;

b) **P**(herbas atvirto tik vieną kartą) $= \frac{1}{4}$;

P(herbas atvirto lygiai du kartus) $= \frac{3}{8}$;

P(herbas atvirto lygiai tris kartus) $= \frac{1}{4}$.

c) Herbas atvirto bent du kartus — t. y. herbas atvirto du, tris arba keturis kartus. Jo tikimybė lygi $\frac{11}{16}$. Šio įvykio tikimybę galima apskaičiuoti ir remiantis priešingojo įvykio tikimybe, t. y.

P(herbas neatvirto ar atvirto tik vieną kartą) $= \frac{5}{16}$.

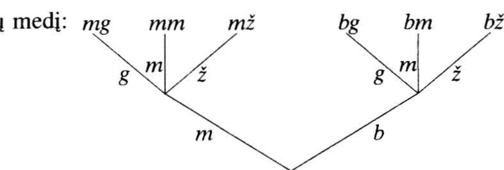
Vadinasi, ieškomo įvykio tikimybė lygi $1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

Apskaičiuosime **P**(skaičius atvirto bent vieną kartą). Tai, kad bent vieną kartą atvirto skaičius, reiškia, kad skaičius atvirto vieną, du, tris arba keturis kartus. Šį kartą tikrai daug geriau pasinaudoti priešingojo įvykio tikimybe. Priešingojo įvykio — „skaičius neatvirto" nė karto tikimybė lygi $\frac{1}{16}$.

Vadinasi, ieškomo įvykio tikimybė lygi $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

d) Įvykiai gali būti įvairiausi, pvz., „skaičius atvirto lygiai du kartus", „skaičius neatvirto" ir kt.

312. Elementariųjų įvykių skaičių galima sužinoti braižant galimybių medį:



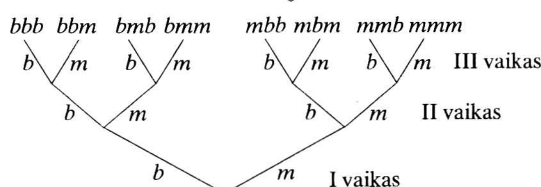
Matome, kad iš viso yra 6 elementarieji įvykiai ($n = 6$).

a) **P**(abu ištraukti kamuoliukai yra skirtingų spalvų) $= \frac{5}{6}$;

b) **P**(ištrauktas tik vienas mėlynas kamuoliukas) $= \frac{1}{2}$;

c) **P**(ištrauktas bent vienas mėlynas kamuoliukas) $= \frac{2}{3}$.

313. a) **P**(šeimoje trys berniukai) $= \frac{1}{8}$;



b) **P**(šeimoje daugiau berniukų negu mergaičių) $= \frac{1}{2}$;

c) **P**(šeimoje bent dvi mergaitės) $= \frac{1}{2}$;

d) **P**(šeimoje tik viena mergaitė) $= \frac{3}{8}$.

314. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

315. Pažymėję laivo savąjį greitį x km/h sudarome lygtį:

$\frac{36}{x-3} - \frac{36}{x+3} = 1$; $x_1 = -15$ (netinka), $x_2 = 15$.

Atsakymas. 15 km/h.

316. Taisyklingojo daugiakampio vieno vidaus kampo didumas apskaičiuojamas pagal formulę $\frac{180°(n-2)}{n}$, kur n — kraštinių skaičius. Sudarome lygtį:

a) $\frac{180°(n-2)}{n} = 135°$, $n = 8$; b) $\frac{180°(n-2)}{n} = 150°$, $n = 12$.

Atsakymas. a) 8; b) 12.

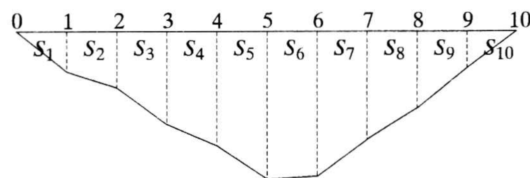
317. Kadangi panašiųjų trikampių plotų santykis lygus atitinkamų kraštinių santykio kvadratui, tai: $(\frac{2}{3})^2 = \frac{16}{S}$, kur S — didesniojo trikampio plotas. Išsprendę lygtį gauname $S = 36$.

Atsakymas. 36 cm^2.

318. Penkis vieną po kito einančius sveikuosius skaičius pažymėkime $x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$, $x + 2$ (galima žymėti ir x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$, bet pirmasis pažymėjimas patogesnis skaičiuojant). Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygtį: $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$; $x_1 = 0$, $x_2 = 12$.

Atsakymas. Ieškomi skaičiai yra: −2, −1, 0, 1, 2 arba 10, 11, 12, 13, 14.

319. Pastebėkime, kad vagos skersinio pjūvio plotą sudaro du statieji trikampiai (šonuose) ir 8 stačiosios trapecijos, kurių kiekvienos aukštinė lygi 1, o pagrindai — nurodytiems gyliams.



$S_1 = \frac{1 \cdot 0,65}{2} = \frac{0,65}{2}$; $S_{10} = \frac{1 \cdot 0,6}{2} = \frac{0,6}{2}$;

$S_2 = \frac{(0,65+0,9) \cdot 1}{2} = \frac{0,65+0,9}{2}$; $S_3 = \frac{0,9+1,5}{2}$ ir t. t.

Bendras plotas:

$S = \frac{0,65}{2} + \frac{0,6}{2} + \frac{0,65+2 \cdot 0,9+2 \cdot 1,5+2 \cdot 1,85+2 \cdot 2,4+2 \cdot 2,35+2 \cdot 1,75+2 \cdot 1,25+0,6}{2} =$

$= \frac{2(0,65+0,9+1,5+1,85+2,4+2,35+1,75+1,25+0,6)}{2} = 13,25\ (\text{m}^2)$.

Atsakymas. 13,25 m^2.

8.4. Daugybos taisyklė

Tai labai svarbus skyrelis.

Lig šiol nagrinėtuose pavyzdžiuose visus galimus elementariuosius įvykius nesunkiai suskaičiuodavome juos surašydami ar braižydami galimybių medį. Kai elementariųjų įvykių daug, juos visus surašyti neįmanoma. Tada taikome kombinatorikos taisykles ir suskaičiuojame galimus elementariuosius įvykius bei nagrinėjamam įvykiui palankius įvykius. Viena iš svarbiausių kombinatorikos taisyklių — *daugybos taisyklė*. Šiame skyrelyje formuluojama daugybos taisyklė, pavyzdžiais parodoma, kaip ją taikyti. Daugybos taisyklė bus kartojama ir 10 klasėje mokant kombinatorikos be formulių. Čia taikysime ir daugybos taisyklę, ir daugybos taisyklę su dalyba.

Pastaba. Daugybos taisyklė taikoma dviem atvejais, kai sudaromi rinkiniai iš dviejų ar daugiau daiktų, paimtų iš:

1) skirtingų aibių;

2) tos pačios aibės.

Šis pastebėjimas labai pravers 10 klasėje.

Pakartoti:

klasikinį tikimybės apibrėžimą;

kombinatorinę sudėties taisyklę.

Išmokti taikyti kombinatorinę daugybos taisyklę sprendžiant uždavinius.

Šiame skyrelyje:

1. Prisimenamas 3 skyrelyje nagrinėtas 1 pavyzdys braižant galimybių medį ir paaiškinama, kaip šį uždavinį galima spręsti sudauginant atskirų daiktų pasirinkimo galimybių skaičius.

   Nurodymas. Šiuo atveju rinkiniai sudaromi iš skirtingų aibių.

2. Remiantis nagrinėtu pavyzdžiu formuluojama daugybos taisyklė pasirinkti du daiktus. Ta taisyklė pateikta savotiška schema-formule:

I-ojo daikto pasirinkimo galimybių skaičius	×	II-ojo daikto pasirinkimo galimybių skaičius	=	Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius

   Nurodymas. Reikia, kad mokiniai suprastų, jog šią taisyklę galima taikyti, kai renkamės ir daugiau negu du daiktus. Galima pasiūlyti mokiniams prieš atsakant į klaustuku pažymėtą klausimą apskaičiuoti, keliais būdais galima išsirinkti, pavyzdžiui, bandelę, gėrimą ir šokoladą, jei valgykloje yra 3 rūšių bandelių, 2 rūšių gėrimų ir 5 rūšių šokoladų.

3. Nagrinėjamas 2 pavyzdys, kuris nuo prieš tai buvusio skiriasi tuo, kad čia kiekvieną kartą renkamės iš tos pačios aibės. Čia svarbu suvokti, kad po kiekvieno pasirinkimo paimtas elementas į aibę negrąžinamas, todėl kitą kartą renkamasi iš aibės, kurios elementų skaičius yra vienetu mažesnis, negu buvo renkantis anksčiau.

   Pastaba. Šis pavyzdys yra vertingas ir tuo, kad parodoma, jog daugybos taisyklė ypač patogi, kai pasirinkimo galimybių skaičius yra didelis.

4. Nagrinėjamas 3 pavyzdys. Jis mokiniams gali būti sunkiau suprantamas. Todėl pirmiausia pasiaiškinkite sąlygą. Surašykite keletą elementariųjų įvykių (bandymo baigčių), pvz., *hhsh, hhhs, shsh.*

   Nurodymas. Šiuo atveju galima sakyti, kad renkamės iš 4 aibių, kurios turi po du elementus (herbą ir skaičių).

5. Nagrinėjamas 4 pavyzdys. Mokiniams jis turėtų būti nesunkiai suprantamas.

   Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai suvoktų skirtumą: kai skaičiuje skaitmenys gali kartotis, tai kiekvieną kartą renkamės iš tos pačios aibės; kai skaičiuje pasikartojančių skaitmenų negali būti, tai po kiekvieno pasirinkimo kito pasirinkimo galimybių skaičius sumažėja vienetu.

   2) Pasiūlykite mokiniams išspręsti analogišką uždavinį, imant skaičius 0, 1, 2, 3, 4.

6. ***Kombinatorinė sudėties taisyklė.*** *Jeigu objektui A parinkti yra m būdų, o objektui B — n būdų, tai pasirinkti arba A, arba B yra $m+n$ būdų. Sudėties taisyklė yra susijusi su jungtimi „arba“.*

   Taikant sudėties taisyklę, reikia žiūrėti, kad nė vienas objekto A pasirinkimo būdas nesutaptų su kokiu nors objekto B pasirinkimo būdu, t. y. kad nė vienas pasirinkimas nepatektų į abi grupes.

   1 pavyzdys. Viename krepšelyje yra 7 obuoliai, o kitame — 5 kriaušės. Keliais būdais galima pasirinkti vieną vaisių? *Atsakymas.* 12.

   2 pavyzdys. Mokyklos bufete yra 4 rūšių bandelių ir 3 rūšių vaisių. Mergaitė nori nusipirkti arba vieną bandelę, arba vieną vaisių. Kiek pasirinkimo galimybių turi mergaitė? *Atsakymas.* 7.

   Kombinatorinę sudėties taisyklę galima pateikti labiau akademiškai:

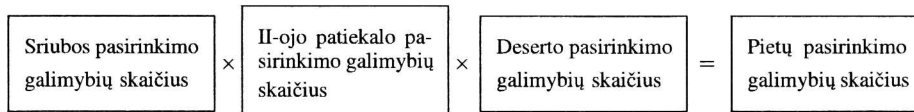
   Tarkime, kad aibėje A yra m elementų, aibėje B — n elementų, ..., aibėje N — k elementų, o kiekviena aibių pora neturi bendrų elementų. Tuomet pasirinkti vieną elementą iš jų (arba iš A, arba iš B, ..., arba iš N) galima $n+m+\cdots+k$ būdais.

   Šią taisyklę galima taikyti, kai renkami trys arba daugiau objektų.

7. Verta dar kartą atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad sudėties taisyklė susijusi su jungtimi „arba“, o daugybos taisyklė — su jungtimi „ir“.

320–335 — teminiai uždaviniai. Beveik visi jie yra skirti daugybos taisyklei taikyti nustatant elementariųjų įvykių skaičių. Nedaug uždavinių, kuriuose reikėtų skaičiuoti tikimybes. Uždavinių, kur reikia taikyti daugybos taisyklę ir skaičiuoti tikimybes, galite rasti uždavinyne. Šiuose uždaviniuose taip pat reikėtų akcentuoti loginę jungtį „ir". 336–341 uždaviniai skirti kartojimui. 30–60

320. Renkamės pietus — sriubą (3 galimybės) *ir* antrąjį patiekalą (5 galimybės), *ir* desertą (2 galimybės). Taikysime daugybos taisyklę.



$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$

Atsakymas. 30.

321. Tadas renkasi sporto (4 galimybės) *ir* techninės kūrybos (3 galimybės) būrelius. Vadinasi, jis turi $4 \cdot 3 = 12$ pasirinkimo galimybių.

Atsakymas. 12.

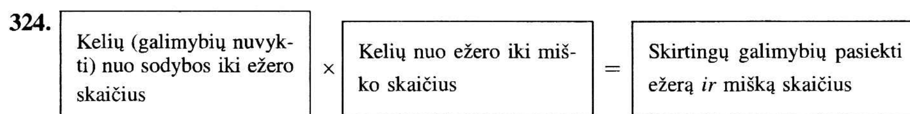
322. Rita renkasi sijoną (iš 3) *ir* palaidinę (iš 5), *ir* švarkelį (iš 2). Vadinasi, iš viso apsirengti yra $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ skirtingų būdų.

Atsakymas. 30.

323. Sauliaus tėvai renkasi *ir* vieną iš 8 dienraščių, *ir* vieną iš 6 sporto žurnalų, *ir* vieną iš 5 žurnalų jaunimui. Vadinasi, jie turi $8 \cdot 6 \cdot 5 = 240$ skirtingų pasirinkimų.

Atsakymas. 240.

324.



$3 \cdot 4 = 12$

Atsakymas. 12.

325. a) I keleivis gali atsisėsti bet kurioje iš 4 vietų (4 pasirinkimo galimybės), tai II — bet kurioje iš trijų likusių (3 pasirinkimo galimybės), III — bet kurioje iš dviejų likusių (2 pasirinkimo galimybės), IV — paskutinėje likusioje (1 pasirinkimo galimybė). Taigi 4 keleiviai 4 vietų lėktuvo eilėje gali susėsti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ skirtingais būdais.

b) I keleivis gali atsisėsti bet kurioje iš 6 vietų (6 galimybės pasirinkti vietą), tai II — bet kurioje iš 5, III — bet kurioje iš 4, IV — bet kurioje iš 3 likusių. Tai 4 keleiviams susėsti 6 vietų lėktuvo eilėje yra $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ būdų.

Atsakymas. a) 24; b) 360.

326. Pirma raidė gali būti bet kuri iš 4, antra — bet kuri iš 3, trečia — bet kuri iš 2 likusių, ketvirta — likusioji raidė. Skirtingų raidžių ketvertų bus $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

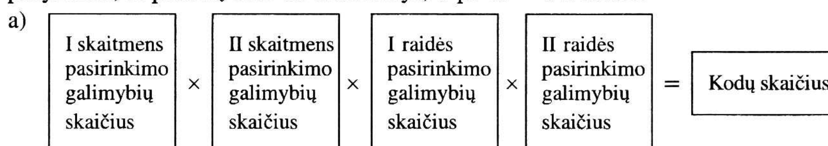
a) **P**(sudėtas žodis ORAS) $= \frac{1}{24}$;

b) **P**(sudėtas žodis SORA) $= \frac{1}{24}$;

c) **P**(sudėtas žodis VORAS) $= \frac{0}{24}$ (raidės V nėra).

327. *Pastaba.* Čia turimi galvoje kodai, kur skaitmenų ir raidžių vieta yra fiksuota, pavyzdžiui, iš pradžių eina du skaitmenys, o po to — dvi raidės.

a)



$10 \cdot 9 \cdot 23 \cdot 22 = 45\,540$;

b) $10 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 23 = 52\,900$;

c) jei kodo skaitmenys ir raidės nesikartoja, tai tikimybė atspėti kodą pirmuoju bandymu lygi $\frac{1}{45\,540} \approx 0{,}000022$;
jei tartume, kad ir skaitmenys, ir raidės gali kartotis, tai tikimybė atspėti kodą pirmuoju bandymu lygi $\frac{1}{52\,900} \approx 0{,}000019$.

Nurodymas. Apytikslė reikšmė nebūtina, bet ji gerai pailiustruoja, kokie maži šansai atspėti kodą pirmuoju bandymu.

328. a) Kiekvieną kartą metant monetą yra 2 galimybės: atvirto herbas arba skaičius. Kadangi moneta metama du kartus, tai elementariųjų įvykių iš viso yra $2 \cdot 2 = 4$.
b) Kiekvieną kartą metant lošimo kauliuką yra 6 galimybės: kauliukas gali atvirsti viena iš šešių sienų. Kadangi kauliukas metamas du kartus, tai iš viso elementariųjų įvykių yra $6 \cdot 6 = 36$.
c) Kiekvieną kartą metant monetą ir lošimo kauliuką yra $2 \cdot 6 = 12$ galimybių. Kai monetą ir lošimo kauliuką metame du kartus, tai iš viso bus $12 \cdot 12 = 144$ elementarieji įvykiai.
Jei mesime monetą 3 kartus — $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, jei 4 kartus — $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ elementariųjų įvykių.
Jei mesime lošimo kauliuką 3 kartus — $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, 4 kartus — $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ elementarieji įvykiai.
Jei mesime monetą ir lošimo kauliuką 3 kartus — $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$, 4 kartus — $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 20\,736$ elementarieji įvykiai.

329. a) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; b) $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ (pirmasis skaitmuo negali būti lygus 0); c) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; d) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

330. a) 1) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; 2) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$;
b) 1) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$; 2) $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$;
c) 1) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$; 2) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$;
d) 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

Nurodymas. 1-as atvejis, kai skaitmenys nesikartoja, 2-as — kai kartojasi.

331. I vietą gali užimti bet kuris iš 5, II — bet kuris iš 4, III — bet kuris iš 3 likusiųjų, tai trys prizinės vietos gali būti paskirstytos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ skirtingų būdų.

332. $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

333. I pamoka — bet kuri iš 6, II pamoka — bet kuri iš 5,
III pamoka — bet kuri iš 4, IV pamoka — bet kuri iš 3,
V pamoka — bet kuri iš 2, VI pamoka — likusioji.
Iš viso skirtingų trečiadienio tvarkaraščių yra: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

334. Tarybos pirmininku gali būti išrinktas bet kuris iš 9, o jo pavaduotoju — bet kuris iš 8 likusių. Iš viso skirtingų rinkimų rezultatų bus $9 \cdot 8 = 72$.

335. Šį uždavinį galima spręsti surašant visus skaičius.
Iš viso galima sudaryti 6 skaičius: 345, 354, 435, 453, 534, 543.
a) 2; b) 2; c) 4.

336. Trupmenos reikšmė lygi nuliui, kai skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui. $x^2 - 49 = 0$, kai $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. Bet kai $x_1 = -7$, vardiklis $x + 7 = -7 + 7 = 0$. Todėl ši reikšmė netinka. Kai $x_2 = 7$, vardiklis $x + 7 = 7 + 7 \neq 0$.
Atsakymas. 7.

337. a) $\frac{-(a-b)^2}{2a^2}$; b) $\frac{(z-y)y}{z}$; c) $\frac{a^2-25}{5(a^2-9a-15)}$ (*Pastaba.* Matome, kad nelabai ką čia ir suprastinome. Tačiau nereikia išsigąsti, jei atsakymas išeina ir „nelabai gražus“); d) $\frac{b(b-1)}{b-6}$.

338. Katerio savąjį greitį pažymėję x km/h pagal uždavinio sąlygą sudarome lygtį: $\frac{12}{x-3} + \frac{12}{x+3} = 2\frac{8}{15}$; $19x^2 - 180x - 171 = 0$. Šios kvadratinės lygties sprendiniai nėra sveikieji skaičiai, todėl atsakymą gausime apytikslį. Galima mokiniams nurodyti, kokiu tikslumu jie turėtų rašyti atsakymą. Jei pakeistume sąlygą: „...nuplaukia per 2 h 8 min...“, gautume, kad katerio savasis greitis yra 12 km/h.
Atsakymas. Maždaug 10,34 km/h.

339. *Pastaba.* Sąlygoje turi būti: raskite *išpjovos* plotą (ne nuopjovos).
a) $S_{išp} = \frac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi R^2}{8}$; b) $S_{išp} = \frac{\pi R^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi R^2}{12}$.

340. Funkcijos $y = -x^2 - 4x + 5$ grafikas yra parabolė. Jos šakos eina žemyn. Parabolės viršūnė yra taške $(-2; 9)$, simetrijos ašis — tiesė $x = -2$. Funkcijos nuliai: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.
a) $x \in (-5; 1)$; b) $x \in (-2; \infty)$; c) į šį klausimą galima atsakyti remiantis grafiku: kadangi tiesė $y = -2$ kerta parabolę dviejuose taškuose, tai yra dvi tokios reikšmės: $x_1 \approx -5{,}3$ ir $x_2 \approx 1{,}3$; d) $(-2; 9)$.

341. Sakykime, kad 1 kg sausainių kainuoja x litų. Pagal sąlygą: $0{,}9x < 10$; $x < \frac{10}{0{,}9}$, t. y. $x < 11{,}12$.
Atsakymas. **A**.

8.5. Dažnis ir tikimybė

Iki šiol buvo nagrinėjami bandymai, kurių elementarieji įvykiai yra vienodai galimi, pavyzdžiui, monetos ir kauliuko mėtymas. 8 klasėje daug kartų mėtydami monetą (kauliuką) mokiniai „statistiškai" nustatė tų bandymų elementariųjų įvykių tikimybes (Matematika 8, I dalis, 6 skyrius, 5 skyrelis). Kitaip sakant, apskaičiavus, pavyzdžiui, herbo atsivertimų *santykinį dažnį* (kai moneta buvo metama *daug* kartų) nesunku patikėti, kad tikimybė atsiversti herbui lygi $\frac{1}{2}$.

Įvykio santykiniu dažniu galima įvertinti ir tikimybę įvykio, kai bandymo baigtys *nėra vienodai galimos*. Šiame skyrelyje teorinėje dalyje ir nagrinėjami du tokie pavyzdžiai. Remiantis jais siekiama formuoti „statistinį" tikimybės supratimą:

> *Statistinė įvykio tikimybė yra skaičius, prie kurio artėja to įvykio santykinis dažnis, kai bandymų skaičius didinamas.*

Pastaba. Vadovėlio teorinėje dalyje daugiau dėmesio skiriama aiškinant, kaip galima įvertinti tikimybę įvykio, kai negalima taikyti klasikinio tikimybės apibrėžimo. Tokio tipo uždavinys vadovėlyje yra vienintelis (346), uždavinyne — taip pat vienintelis (17). Šie uždaviniai yra realaus turinio, mokiniai gali rasti pavyzdžių gyvenime, jiems tai įdomu. Kiti vadovėlyje pateikti teminiai uždaviniai skirti bandymams, kurių elementarieji įvykiai yra vienodai galimi, siekiant parodyti, kad f(įvykio) $\approx$ **P**(įvykio).

Pakartoti:

atsitiktinio įvykio tikimybės apibrėžimą;
skaičiaus dalies reiškimą procentais.

Išmokti:

apskaičiuoti įvykių santykinius dažnius (kai bandymo rezultatai duoti ir kai rezultatus fiksuoja patys mokiniai atlikdami bandymus);

interpretuoti tikimybes, siejant jas su santykiniais dažniais.

Šiame skyrelyje:

1. Praktikoje dažnai susiduriama su statistiškai įvertintomis įvykių tikimybėmis. Krepšinio varžybų metu dažnai girdime sakant, pavyzdžiui: „krepšininkas baudas mėto 83% taiklumu", „komanda tritaškius mėto 40% taiklumu" ir panašiai. Ką tai reiškia ir kaip tie skaičiai gauti, aiškinama 1 pavyzdžiu.
2. Antru pavyzdžiu aiškinama, kaip galima nustatyti nežinomą įvykio tikimybę, kai neįmanoma remtis klasikiniu tikimybės apibrėžimu.

   Nurodymas. Čia svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog įvertindami tokio įvykio tikimybę turime bandymą pakartoti kuo daugiau kartų.
3. Remiantis išnagrinėtais pavyzdžiais teigiama, kad nežinomą įvykio tikimybę galima įvertinti santykiniu įvykio dažniu, t. y. **P**(įvykio) $\approx$ f(įvykio).
4. Primenama, kad santykiniu įvykio dažniu galima įvertinti ir žinomas įvykių tikimybes. Tuo tikslu pateikiami įvairių garsių žmonių atlikti su monetos mėtymu susiję eksperimentai.

   Pastaba. Faktą, kad herbas bandymuose atsivertė dažniau, gal galima paaiškinti tuo, kad monetos masės centras galėjo būti arčiau herbo pusės (herbui gali reikti daugiau lydinio negu skaičiui).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

342–346 — teminiai uždaviniai. Sprendžiant šiuos uždavinius reikia, kad mokiniai turėtų monetų ir lošimo kauliukų. 347–351 kartojimui skirti pratimai. 15–17

342. 40 kartų nėra didelis metimų skaičius. Todėl prasminga apskaičiuoti visų mokinių bandymų bendrą santykinį dažnį, nes tada jis greičiausiai bus artimesnis žinomai tikimybei — $\frac{1}{2}$.

343. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{4}$.
Nurodymas. Mokytojui reikėtų pagalvoti, kaip organizuoti mokinių darbą — galima juos suskirstyti į grupeles. Vieni grupelės nariai gali mėtyti monetas, kiti — registruoti duomenis ir pan.

344. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{2}$.

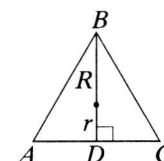
345. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{12}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{5}{12}$.

Šių įvykių tikimybės apskaičiuotos 269 uždavinyje.

346. Iš viso yra 40 mokinių.
a) Išlaikys egzaminą — reiškia gaus 4–10. f(išlaikys egzaminą) $= \frac{37}{40}$;
b) $\frac{3}{40}$; c) $\frac{11}{40}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{1}{4}$.

347. a) $-\frac{3}{x^2}$; b) $-\frac{z^2}{5}$.

348. a) $h = BD = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (cm)
(arba: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$);
b) $S_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ (cm^2) (arba: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$);



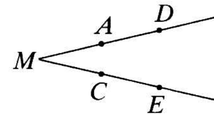
c) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ (cm);

d) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$ (cm).

Pastaba. Skaičiuojant apibrėžto apie duotą trikampį apskritimo spindulį patogu naudotis tuo, kad lygiakraščio trikampio pusiaukampinės kartu yra ir pusiaukraštinės, ir taikyti trikampio pusiaukraštinių savybę. Tuomet $R = \frac{2}{3}BD = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$. Į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys $r = \frac{1}{3}BD = 2\sqrt{3}$.

349. a) Taikysime atvirkštinę Talio teoremą, t. y. patikrinsime, ar $\frac{MD}{MA} = \frac{ME}{MC}$.

1) $\frac{MD}{AD} = \frac{11 \cdot 2}{8{,}5 \cdot 2} = \frac{22}{17}$, $AD = \frac{17}{22}MD$, $MA = MD - AD = MD - \frac{17}{22}MD = \frac{5}{22}MD$; $\frac{MD}{MA} = \frac{MD}{\frac{5}{22}MD} = \frac{22}{5}$;



2) $MC = \frac{5}{17}CE$, $CE = \frac{17}{5}MC$, $ME = MC + CE = MC + \frac{17}{5}MC = \frac{22}{5}MC$; $\frac{ME}{MC} = \frac{\frac{22}{5}MC}{MC} = \frac{22}{5}$.

3) Kadangi $\frac{MD}{MA} = \frac{ME}{MC}$, tai $AC \parallel DE$.

b) 1) $MA = \frac{7}{13}MD$, $\frac{MD}{MA} = \frac{13}{7}$;

2) $ME = MC + CE = 28 + 20 = 48$ (cm), $\frac{ME}{MC} = \frac{48}{28} = \frac{12}{7}$.

3) Kadangi $\frac{MD}{MA} \neq \frac{ME}{MC}$, tai $AC \nparallel DE$.

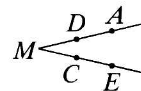
Pastaba. Uždavinio sąlygoje nepasakyta, kaip išsidėstę taškai, t. y.:

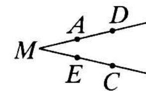
a) kuris taškas — A ar D — yra arčiau taško M;

b) kuris taškas — C ar E — yra arčiau taško M.

Išnagrinėjome atvejį, kai arčiau taško M yra: a) taškas A; b) taškas C.

Jei imsime kitą atvejį, tai jau iš brėžinio akivaizdu, kad tiesės kertasi.





Atsakymas. a) Jei taškas A yra tarp taškų M ir D, tai $AC \parallel DE$; jei taškas D yra tarp taškų M ir A, tai $AC \nparallel DE$; b) $AC \nparallel DE$.

350. a) $(-6; 4)$; b) $(5; -3)$.

351. a) Su visomis, išskyrus $x = 4$; b) $x \geqslant 4$; c) $x > 4$; d) $x \geqslant 0$.

8.6. Koreliacija

5–8 klasėse mokiniai mokėsi rinkti, registruoti, grafiškai vaizduoti, interpretuoti duomenis, apskaičiuoti kai kurias jų charakteristikas. Bet buvo tiriamas tik vienas kuris nors požymis — temperatūra, bėgimo laikas, svoris, ūgis, pažymiai ir pan.

Gyvenime mums įdomūs ne tik atskiri požymiai, bet ir ryšys tarp jų. Pavyzdžiui, ar yra sąryšis tarp žmogaus ūgio ir svorio, tarp tėvų ir vaikų išsimokslinimo ir pan.

Šiame skyrelyje nagrinėjamas dviejų stebimų kintamųjų (požymių) sąryšis (priklausomybė). Pažymint surinktus duomenis apie nagrinėjamus požymius koordinačių plokštumoje aiškinamasi, ar tarp požymių yra *tiesinio* priklausomumo sąryšis.

Jei duomenys grupuojasi apie kurią nors pasvirąją tiesę, tai sakoma, kad tarp požymių yra koreliacija (teigiama — kai tiesės krypties koeficientas teigiamas; neigiama — kai tiesės krypties koeficientas neigiamas). Požymiai nėra koreliuoti, jei taškai, vaizduojantys nagrinėjamus duomenis, nesigrupuoja apie kurią nors pasvirąją tiesę.

Nurodymas. Vaizduojant duomenis reikėtų atkreipti dėmesį į tinkamą mastelio pasirinkimą koordinačių ašyse. Ypač, kai ašyse atidedami skirtingais vienetais matuojami dydžiai, pavyzdžiui, svoris ir ūgis. Įsivaizduojamo stačiakampio, kuriame telpa visi pavaizduoti duomenys, kraštinės neturėtų labai skirtis.

Pakartoti:

taškų atidėjimą koordinačių plokštumoje;

ryšį tarp tiesės krypties koeficiento ir kampo tarp tiesės ir x ašies.

Išmokti:

pavaizduoti duomenų poras koordinačių plokštumoje;

sąvokas: požymiai teigiamai koreliuoti, neigiamai koreliuoti.

nustatyti, ar tarp pavaizduotų požymių yra koreliacija (tuo atveju, kai yra, nustatyti, ar ji teigiama, ar neigiama).

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjamas 1 pavyzdys, kai tiriami požymiai yra teigiamai koreliuoti.

   Nurodymas. Tokį tyrimą galima atlikti ir klasėje.

2. Nagrinėjamas 2 pavyzdys, kai tiriami požymiai yra neigiamai koreliuoti.

   Pastabos. Atkreiptinas dėmesys į tai, kad tiesė, apie kurią grupuojasi duomenys, nubrėžta tik teorinėje dalyje. Statistikoje tokia tiesė vadinama regresijos tiese. Šios tiesės parametrai — krypties koeficientas ir poslinkis — yra įvertinami remiantis duomenimis. Tai reikalauja pakankamai daug skaičiavimų ir mokiniams apie teoriškai pagrįstą regresijos tiesės brėžimą neužsimenama. Apytiksliai tiesę galima nubrėžti laikantis reikalavimo, kad vienoje ir kitoje nubrėžtosios tiesės pusėje būtų vienodas taškų skaičius. Kai tiesė nubrėžta, galima prognozuoti duomenų kitimą, įvertinti tarpinius rezultatus. Sprendžiant uždavinius tiesių brėžti nereikia.

3. Pateikiamas 3 pavyzdys, kai tiriami požymiai nėra koreliuoti.

   Pastaba. Keičiant mastelį 3 pavyzdyje galima pasiekti, kad taškai būtų išsidėstę apie tiesę, lygiagrečią kuriai nors iš ašių. (Kai požymiai yra koreliuoti, tai taškai išsidėstę apie kurią nors *pasvirąją* tiesę.)

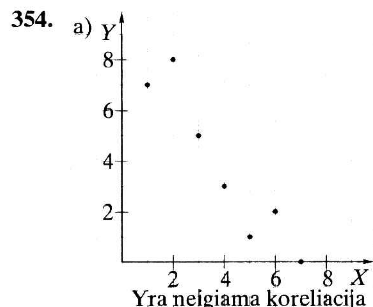
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

352–357 — teminiai; 358–365 — kartojimo uždaviniai. 61–66

352. a) Teigiama koreliacija; b) koreliacijos nėra; c) neigiama koreliacija; d) koreliacijos nėra.

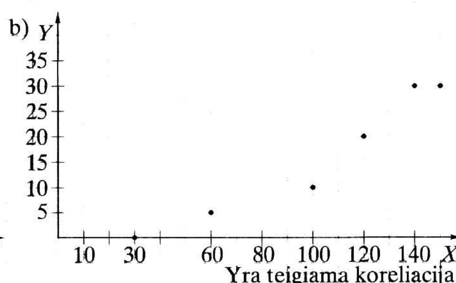
353. Atkreipkite dėmesį į užduoties antrąjį sakinį — „Paaiškinkite, kodėl taip *manote*“ (o ne kodėl taip yra). Į daugelį klausimų vienareikšmiškai atsakyti negalima. Tad svarbiausia, kad mokiniai teisingai vartotų sąvokas, mokėtų paaiškinti, pagrįsti savo išvadas.

354. a)



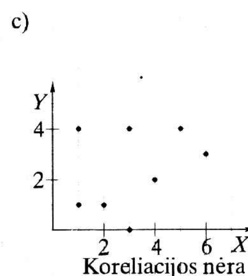
Yra neigiama koreliacija

b)



Yra teigiama koreliacija

c)



Koreliacijos nėra

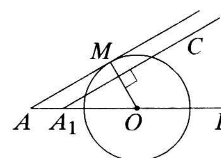
Uždavinius 355–357 mokiniams galima pasiūlyti kaip projektinius darbus, nes reikės skirti nemažai laiko duomenims surinkti.
Realioje situacijoje gali pasitaikyti teorinėje dalyje neaptartas atvejis — kai kurių tiriamųjų duomenys gali sutapti. Kaip tada elgtis? Pvz., jei 3 vaikų matematikos ir užsienio kalbos pažymiai yra 8, 7, tai juos galima vaizduoti trimis, kiek įmanoma, artimais skirtingais taškais.

358. a) Gali, kai $x = -8$; b) negali.

359. a) $-\frac{4c^3}{3b^4}$; b) $\frac{10x}{b^2}$; c) 3; d) $\frac{1}{2}$.

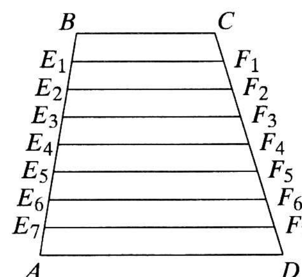
360. *I būdas.* Pasinaudojame statinio prieš 30° kampą ir įžambinės ilgių sąryšiu. Nubraižyto 30° kampo vienoje kraštinėje nuo viršūnės atidedame 5 cm ilgio atkarpą. Per atkarpos galą, kaip apskritimo centrą, nubraižome 2,5 cm spindulio apskritimą. Jis ir yra ieškomas.

II būdas. Nubraižome $\angle A_1 = 30°$ ir apskritimą, kurio centras O būtų vienoje kampo kraštinėje, o spindulys lygus 2,5 cm. Galimi tokie atvejai:
1) apskritimas kerta kitą kampo kraštinę;
2) apskritimas liečia kitą kampo kraštinę;
3) apskritimas su kita kampo kraštine neturi bendrų taškų.
Jei pavyks iškart taip nubrėžti apskritimą, kad jis liestų kitą kampo kraštinę, turėsime tai, ko ir reikalauja uždavinio sąlyga.
Panagrinėkime 1) atvejį — kai nubrėžtas apskritimas kerta kitą kampo kraštinę. Toliau braižytume taip: iš apskritimo centro brėžiame statmenį į A_1C ir pažymime statmens ir apskritimo susikirtimo tašką M. Lieka nubrėžti tiesę AM, lygiagrečią kampo kraštinei A_1C.



Analogiškai braižytume ir 3) atveju.
Nurodymas. Atstumą nuo kampo viršūnės iki apskritimo centro rasite taikydami statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę.
Atsakymas. 5 cm.

361. E_4F_4 — trapecijos $ABCD$ vidurinė linija, tai $E_4F_4 = \frac{30+50}{2} = 40$ cm;
E_2F_2 — trapecijos E_4F_4CB vidurinė linija, tai $E_2F_2 = \frac{30+40}{2} = 35$ cm.
Analogiškai:
$E_1F_1 = \frac{30+35}{2} = 32{,}5$ cm, $E_3F_3 = \frac{35+40}{2} = 37{,}5$ cm,
$E_6F_6 = \frac{40+50}{2} = 45$ cm, $E_5F_5 = \frac{40+45}{2} = 42{,}5$ cm,
$E_7F_7 = \frac{45+50}{2} = 47{,}5$ cm.



362. Kadangi duotieji trinariai turi įgyti lygias reikšmes, tai $2z^2+5x-4 = 3z^2-z+1$, t. y. $z^2 - 6z + 5 = 0$. Išsprendę kvadratinę lygtį (ar atspėję šaknis pagal Vijeto teoremą) gauname $z_1 = 1$, $z_2 = 5$.
Atsakymas. 1 ir 5.

363. $2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1\cdot 2}{2\frac{1}{2}\cdot 2}} = 2 + \frac{1\cdot 5}{\left(2+\frac{2}{5}\right)\cdot 5} = 2 + \frac{5}{12} = 2\frac{5}{12}$.
Atsakymas. **F**.

364. Kadangi $a < b$, tai:
a) iš abiejų nelygybės pusių atėmę 5 gausime $a - 5 < b - 5$;
b) abi nelygybės puses padauginę iš $-\frac{3}{5}$ gausime $-\frac{3}{5}a > -\frac{3}{5}b$;
c) iš mažesniojo skaičiaus atėmę didesnį gausime $a - 2 < b - 1$;
d) abi nelygybės puses padauginę iš -2 gausime $-2a > -2b$.
Pastaba. Stipresnieji mokiniai galėtų čia prisiminti vadinamąjį skirtumo ženklo nustatymo būdą. Kadangi $a < b$, tai $a - b < 0$. Tuomet:
a) $a - 5 - (b - 5) = a - b < 0$. Vadinasi, $a - 5 < b - 5$;
b) $-\frac{3}{5}a - \left(-\frac{3}{5}b\right) = -\frac{3}{5}(a - b)$. Kadangi $a - b < 0$, tai $-\frac{3}{5}(a - b) > 0$ ir $-\frac{3}{5}a > -\frac{3}{5}b$;
c) $a-2-(b-1) = a-b-1$. Kadangi $a-b < 0$, tai $a-b-1 < 0$ ir $a-2 < b-1$;
d) $-2a - (-2b) = -2(a - b)$. Kadangi $a - b < 0$, tai $-2(a - b) > 0$ ir $-2a > -2b$.

365. a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S	1	3	6	10	15	21	28	36	45

b) Rutulių yra: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{(10+1)\cdot 10}{2} = 55$;
c) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 1000 = \frac{(1000+1)\cdot 1000}{2} = 500\,500$.

9. ERDVINIAI KŪNAI

Vadovėlyje, kaip ir ankstesniuose naujuosiuose matematikos vadovėliuose, vienas skyrius skiriamas erdviniams kūnams nagrinėti. Šiame skyriuje nagrinėjami taisyklingoji piramidė (9.2 skyrelis), kūgis (9.3 skyrelis) bei sfera ir rutulys (9.4 skyrelis).

Pastaba. 10 klasėje numatoma nagrinėti nupjautinę piramidę ir nupjautinį kūgį.

Svarbiausia šiame skyriuje išmokyti skaičiuoti minėtų erdvinių kūnų paviršių plotus ir tūrius. Skaičiuojant piramidės tūrį reikia žinoti piramidės aukštinės ilgį (atstumą nuo piramidės viršūnės iki pagrindo). Todėl pirmiausia supažindinama su stereometrijos elementais: tašku, tiese ir plokštuma, akcentuojant kai kurias jų tarpusavio padėtis (9.1 skyrelis).

Nurodymas. Vadovėlyje (9.3 skyrelis) skaičiuojami tik *taisyklingųjų* piramidžių tūriai. Uždavinyne yra pora uždavinių, skirtų netaisyklingosios piramidės tūriui apskaičiuoti (9 skyrius, 4 ir 5 uždaviniai). Uždaviniai, skirti netaisyklingosioms piramidėms, bus pateikti 10 klasės vadovėlyje (įvairių skyrelių neteminių uždavinių rinkiniuose, kurie skirti praeitos medžiagos kartojimui ir plėtojimui).

Minimalus lygmuo:

1. Žinoti, ką vadiname atstumu nuo taško iki plokštumos.
2. Žinoti, kokia piramidė vadinama taisyklingąja.
3. Žinoti, ką vadiname taisyklingosios piramidės apotema.
4. Gebėti apskaičiuoti taisyklingosios piramidės šoninio ir viso paviršiaus plotus, tūrį.
5. Gebėti apskaičiuoti kūgio šoninio ir viso paviršiaus plotus, tūrį.
6. Gebėti apskaičiuoti sferos paviršiaus plotą ir tūrį.
7. Kubo modelyje nurodyti pavyzdžius: lygiagrečių bei prasilenkiančių tiesių; briaunų, statmenų kuriai nors kubo sienai; lygiagrečių plokštumų.

Pagrindinis lygmuo:

8. Žinoti, kokia gali būti dviejų tiesių tarpusavio padėtis erdvėje.
9. Žinoti, kokia tiesė vadinama statmeniu plokštumai.
10. Žinoti, kokios plokštumos vadinamos lygiagrečiomis.
11. Žinoti sąvokas: statmuo, pasviroji, pasvirosios projekcija plokštumoje.
12. Žinoti, kokia piramidė vadinama tetraedru.
13. Gebėti apskaičiuoti bet kokios piramidės tūrį, kai žinomas pagrindo plotas ir piramidės aukštinė.
14. Mokėti pasidaryti taisyklingosios piramidės ir kūgio modelius.

Aukštesnis lygmuo:

15. Gebėti išvesti kūgio šoninio paviršiaus ploto formulę.
16. Gebėti apskaičiuoti rutulio nuopjovos tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.
17. Gebėti nustatyti Žemės paviršiaus vietovės geografines koordinates.
18. Gebėti pagrįsti piramidės ir kūgio tūrių formules.

9.1. Tiesė ir plokštuma erdvėje. Atstumas nuo taško iki plokštumos

Šis skyrelis – įvadas į stereometriją. Svarbiausia šiame skyrelyje, kad mokiniai suprastų, kas yra atstumas nuo taško iki plokštumos.

Pastaba. 8 klasėje buvo kalbama apie atstumą nuo taško iki tiesės (Matematika 8, I dalis, 4 skyrius, 3 skyrelis).

Pakartoti:

ką vadiname stačiakampiu gretasieniu;
plokštumos tiesių tarpusavio padėtis;
lygiagrečių plokštumos tiesių apibrėžimą;
atstumą nuo taško iki tiesės;
teiginį, kad stačiojo trikampio įžambinė yra ilgesnė už kiekvieną jo statinį.

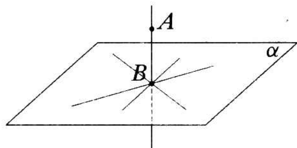
Išmokti:

apibūdinti sąvokas: lygiagrečios plokštumos, lygiagrečios ir prasilenkiančios tiesės, statmuo plokštumai, pasvirosios projekcija plokštumoje;
ką vadiname atstumu nuo taško iki plokštumos;
ką vadiname kampu tarp pasvirosios ir plokštumos (10 klasėje bus apibrėžtas kampas tarp plokštumų).

Šiame skyrelyje:

1. Remiantis stačiakampio gretasienio modeliu (brėžiniu) apibrėžiamos lygiagrečios plokštumos, lygiagrečios ir prasilenkiančios tiesės.

   Nurodymai. 1) Pagrindinis dėmesys turi būti skiriamas tiesės ir plokštumos statmenumui. Pastebėsime, kad vadovėlyje apsiribota atskiru tiesės statmenumo plokštumai apibrėžimu: „Tiesė AB vadinama statmena plokštumai α, jeigu ji statmena bet kuriai plokštumos α tiesei, einančiai per tašką B“.



   Reikėtų pabrėžti, kad taškas B priklauso plokštumai α. (Kad tiesė AB yra statmena ir bet kuriai plokštumos α tiesei, 9 klasėje nenagrinėjama.)

   2) Stipresniems mokiniams vertėtų nusakyti tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis:

   - tiesė ir plokštuma neturi bendrų taškų;
   - tiesė kerta plokštumą (turi vieną bendrą tašką);
   - tiesė priklauso plokštumai.

   3) Pratinkite mokinius realiose situacijose atpažinti nagrinėjamas sąvokas. Labai patogu stačiakampio gretasienio modeliu laikyti klasę, kambarį ar pan.

2. Nagrinėjama plokštuma ir šalia jos esantis taškas siekiant paaiškinti, kas yra atstumas nuo taško iki plokštumos.

   Nurodymai. 1) Sąvokos: *statmuo*, *pasviroji*, *pasvirosios projekcija* mokiniams yra žinomos iš 8 klasės, todėl neturėtų būti sunku paaiškinti, ką vadiname kampu tarp pasvirosios ir plokštumos. Šios sąvokos bus reikalingos ir kituose skyreliuose sprendžiant uždavinius.

   2) Labai svarbi yra kampo tarp tiesės ir plokštumos sąvoka. Praktiškai mokiniai labai dažnai klysta konkrečiu atveju nustatydami kampą tarp tiesės ir plokštumos. Apibrėžus sąvoką, reikia pakankamai skirti treniruojamojo pobūdžio pratimų. Net paprasčiausiais atvejais daugeliui mokinių būna sunku rasti tiesės projekciją plokštumoje, be kurios negalima teisingai nurodyti kampą. Naudinga atlikti tokią užduotį:

   1) Nubraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
   2) Nurodykite kampą, kurį sudaro gretasienio įstrižainė AC_1 su pagrindų plokštumomis ir šoninėmis sienomis.
   3) Paprašykite mokinių nurodyti kampus tarp kitų gretasienio įstrižainių, pvz., BD_1, A_1C, ir gretasienio sienų ir pagrindų.

Teminiai pratimai yra 366–370; kartojimo — 371–378. 1–3

366. a) AA_1D_1; b) AD, BC, B_1C_1; c) B_1D_1; d) BC, B_1C_1, CD, C_1D_1, BD, B_1D_1, DB_1; e) CC_1; f) BC, B_1C_1, A_1D_1; g) AB, DC, A_1B_1, C_1D_1; h) tiesė A_1C nėra statmena plokštumai ABC, nes ji nėra statmena nei vienai plokštumos ABC tiesei; i) atkarpa, jungianti stačiakampių $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainių susikirtimo taškus.

367. 20 cm.

368. 13 cm.

369. $\sqrt{353}$ cm. *Nurodymas.* Papildomai pateikite mokiniams tokį uždavinį: „Atstumas nuo taško A iki plokštumos α lygus 8 cm, o pasvirosios AB plokštumai α ilgis — 17 cm. Raskite šios pasvirosios projekcijos plokštumoje α ilgį“. (*Atsakymas.* 15 cm.)

370. $\frac{a(4\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}$. *Nurodymas.* Pastebėkite, kad 4 laužtės grandys (AE, GC_1, C_1F ir AF) yra vienodo ilgio ir jos lygios po $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Iš stačiojo trikampio EB_1G remdamies Pitagoro teorema apskaičiuokite $EG = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

371. C.

372. Metant monetą du kartus galimos tokios baigtys: hh, hs, sh, ss. Iš šių baigčių reikia išrinkti baigtis, kai herbas atvirsta bent vieną kartą, t. y. hh, hs, sh.

373. a) $-\frac{9b^4c}{4}$; b) $-\frac{3y^5}{7}$.

374. Sakykime, kad meistras be savo mokinio gali įvykdyti užsakymą per t valandų. Tada mokinys šį užsakymą gali įvykdyti per $(t+3)$ valandų. Per 1 valandą meistras atlieka $\frac{1}{t}$ darbo, mokinys — $\frac{1}{t+3}$ darbo, o abu kartu — $\frac{1}{2}$ darbo. Sprendžiame lygtį: $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+3} = \frac{1}{2}$, $t_1 = -2$ (netinka), $t_2 = 3$.
Atsakymas. Per 3 h.
Pastaba. Galima spręsti ir sudarant lygčių sistemą, kurios viena lygtis netiesinė. Sakykime, kad dirbdamas atskirai meistras gali įvykdyti užsakymą per x valandų, o mokinys — per y valandų. Per 1 valandą meistras atlieka $\frac{1}{x}$ darbo, mokinys — $\frac{1}{y}$ darbo, o abu kartu $\frac{1}{2}$ darbo.
$\begin{cases} y - x = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 6, \\ x = 3. \end{cases}$

375. a) 10; b) 15. *Nurodymas.* Kiekvienas taisyklingojo daugiakampio kampas lygus $\frac{180°(n-2)}{n}$. Kiekvienas priekampis lygus $180° - \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{360°}{n}$.

376. $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$. Tuomet $R = \sqrt{\frac{360S}{\pi\alpha}}$.
a) Kai $\alpha = 72°$, tai $R = \sqrt{\frac{360S}{72\pi}} = \sqrt{\frac{5S}{\pi}}$; b) kai $\alpha = 36'$, t. y. $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}°$, tai $R = \sqrt{\frac{360S}{\frac{3}{5}\pi}} = 10\sqrt{\frac{6S}{\pi}}$.

377. Reikia rasti skaičių, kuris dalijasi iš 18, iš 20 ir iš 24 ir yra tarp 500 ir 1000. Prie to skaičiaus pridėję 9 gausime norimą skaičių. Vadinasi, reikia rasti skaičių 18, 20 ir 24 bendrąjį kartotinį, esantį tarp 500 ir 1000. Pirmiausia nustatykime tų skaičių mažiausią bendrąjį kartotinį: MBK(18; 20; 24) = 360. Skaičiai pavidalo $360 \cdot n$, $n \in \mathbf{N}$, dalosi iš 18, 20 ir 24. Tarp 500 ir 1000 yra skaičius $360 \cdot 2 = 720$. Taigi mokykloje mokosi $720 + 9 = 729$ mokiniai.
Nurodymas. Skaičiavimai bus paprastesni, jei visus skaičius padalysime iš 2. Tada belieka rasti 9, 10 ir 12 bendrąjį kartotinį tarp 250 ir 500:
MBK(9; 10; 12) = 180.
Tarp 250 ir 500 bus kartotinis $180 \cdot 2 = 360$. Tada ieškomas skaičius yra $360 \cdot 2 = 720$. Mokykloje mokosi $720 + 9 = 729$ mokiniai.

378. Galime pastebėti, kad iš antrojo skaičiaus atėmę pirmąjį, iš trečiojo — antrąjį ir t. t. gausime nelyginių skaičių seką, kurios pirmasis narys lygus 3, t. y. $5-2=3$, $10-5=5$, $17-10=7$, $26-17=9$, $37-26=11$, $50-37=13$. Mokiniai šį dėsningumą tikriausiai nesunkiai pastebės. Bet remiantis juo užrašyti bet kurį šios sekos skaičių nepavyks.
Iš tikrųjų, reikia pastebėti, kad kiekvienas skaičius yra lygus prie natūraliojo skaičiaus kvadrato pridėjus 1, t. y.:
$2 = 1^2 + 1$; $5 = 2^2 + 1$; $10 = 3^2 + 1$; $17 = 4^2 + 1$; $26 = 5^2 + 1$; $37 = 6^2 + 1$; $50 = 7^2 + 1$ ir t. t. Dabar jau galima parašyti ir norimą reiškinį: $n^2 + 1$, $n \in \mathbf{N}$.

9.2. Taisyklingoji piramidė

Piramidės sąvoka mokiniams gerai žinoma. Šiame skyrelyje nagrinėjamos *taisyklingosios* piramidės. Taisyklingoji piramidė iš kitų piramidžių išsiskiria 2 požymiais:

1) jos pagrindas — taisyklingasis daugiakampis;

2) piramidės aukštinė eina per pagrindo centrą.

Pastaba. Taisyklingąją piramidę galima apibūdinti ir kitaip: piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o šoninės sienos — lygiašoniai trikampiai.

Pagrindinis skyrelio tikslas — išmokyti apskaičiuoti taisyklingosios piramidės šoninio ir viso paviršiaus plotus bei tūrį.

Pakartoti:

ploto ir tūrio matavimo vienetus;
trikampio aukštinės ir piramidės aukštinės sąvokas;
taisyklingojo daugiakampio apibrėžimą;
ką vadiname taisyklingojo daugiakampio centru;
lygiakraščio ir lygiašonio trikampių savybes;
Pitagoro teoremą;
trikampio ploto skaičiavimą;
trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško savybę.

Išmokti:

ką vadiname taisyklingąja piramide;
kokią piramidę vadiname tetraedru;
ką vadiname piramidės apotema;
apskaičiuoti taisyklingosios piramidės šoninio ir viso paviršiaus plotus bei tūrį.

Šiame skyrelyje:

1. Pavaizduojamos ir apibūdinamos taisyklingosios trikampė, keturkampė ir šešiakampė piramidės bei pateikiamas taisyklingosios piramidės apibrėžimas:

> *Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinė eina per pagrindo centrą, vadinama taisyklingąja piramide.*

2. Aiškinama, kaip patogu braižyti taisyklingąją trikampę piramidę.

   Nurodymas. Braižant taisyklingąją trikampę piramidę reikia atkreipti mokinių dėmesį į tai, kad piramidės pagrindas — taisyklingasis trikampis (lygiakraštis trikampis) vaizduojamas netaisyklinguoju trikampiu. Svarbu, kad piramidės aukštinė eitų per pavaizduoto trikampio pusiaukraštinių susikirtimo tašką. Braižant taisyklingąją keturkampę piramidę — pagrindas vaizduojamas lygiagretainiu.

3. Pateikiama užduotis siekiant panagrinėti taisyklingąją keturkampę piramidę.

   Užduoties sprendimas. 1) $\triangle SOA$, $\triangle SOB$, $\triangle SOC$, $\triangle SOD$, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$;

   2) $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC^2 = 72$, $AC = 6\sqrt{2}$ cm; $OC = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$ cm. $SC^2 = SO^2 + OC^2$, $SC^2 = 43$, $SC = \sqrt{43}$ cm.

   Nesunkiai įsitikiname, kad $SC = SA = SB = SD$;

   3) Trikampiai ASB, BSC, CSD ir DSA yra lygiašoniai. $SE^2 = SC^2 - CE^2 = SC^2 - (\frac{1}{2}BC)^2 = 43 - 9 = 34$. $SE = \sqrt{34}$ cm.

   4) $S_{\text{šon}} = 4 \cdot S_{BSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SE = 12\sqrt{34}$ (cm^2).

   Nurodymai. 1) Tai labai svarbi užduotis, todėl reikia, kad ją atliktų visi mokiniai.

   2) Svarbiausia atliekant užduotį pastebėti ir padaryti išvadą, kad taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Lygių lygiašonių trikampių aukštinės, nubrėžtos į jų pagrindus, yra lygios. (*Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama tos piramidės apotema.*)

   3) Aptarkite užduoties 4 punktą, t. y. pastebėkite, kad skaičiuojant šoninio paviršiaus plotą galima apskaičiuoti vienos šoninės sienos plotą ir jį padauginti iš 4. Pastebėkite, kad gausime tą patį, jei pagrindo pusperimetrį dauginsime iš apotemos.

   4) Papildomai galima liepti mokiniams apskaičiuoti viso piramidės paviršiaus plotą.

   5) Papildomai galima liepti mokiniams apskaičiuoti piramidės tūrį (prieš tai pateikus formulę).

   Pastaba. Neprivalomoje teorinėje dalyje (122 p.) pateikiamas vaizdus specialios piramidės tūrio formulės išvedimas.

4. Pateikiamos formulės taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotui ir tūriui apskaičiuoti.

   Nurodymai. 1) Liepkite mokiniams tūrio formulę nusakyti žodžiais.

   2) Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog piramidės (bet kokios) šoninio paviršiaus plotas lygus jos šoninių sienų plotų sumai.

   3) Tūrio formulė tinka ne tik taisyklingajai piramidei. (Tokių uždavinių galite pateikti patys.)

5. Pavaizduojama ir pasakoma, kokia piramidė vadinama tetraedru.

> *Trikampė piramidė, kurios visos keturios sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, vadinama tetraedru.*

   Pastaba. Žodis *lygūs* apibrėžime nėra būtinas. (To galima paklausti mokinių.)

6. Pateikiamas ir išsprendžiamas uždavinys siekiant parodyti, kaip galima apskaičiuoti tetraedro viso paviršiaus plotą ir tūrį, kai žinomas jo briaunos ilgis.

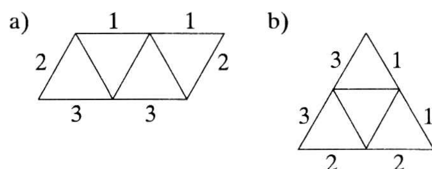
   Nurodymas. Būtų gerai, kad šį uždavinį suprastų dauguma mokinių, todėl nepagailėkite tam laiko.

379–387 pratimai yra teminiai. Svarbu, kad mokiniai iš pavaizduotų erdvinių kūnų mokėtų atpažinti, ar tarp jų yra taisyklingųjų piramidžių (379); iš daugelio figūrų atskirtų piramidės išklotines (380, 381); išmoktų pagal pateiktus duomenis apskaičiuoti įvairius piramidės elementus (382–387). Sprendžiant šiuos uždavinius, be Pitagoro teoremos, reikės prisiminti ir statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę bei kampą tarp pasvirosios ir plokštumos. Be to, labai pravartu žinoti formules lygiakraščio trikampio aukštinei ir plotui apskaičiuoti, kai žinoma jo kraštinė. Šių formulių teisingumu buvo galima įsitikinti 8 klasėje (žr. „Matematika 8. Uždavinynas", 31 p., 7 uždavinys).

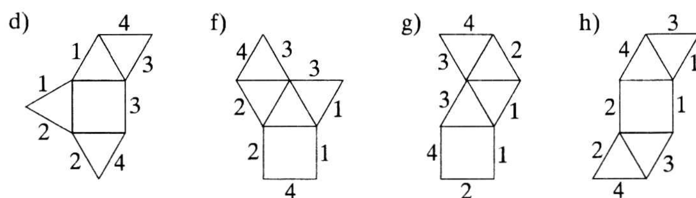
388–395 pratimai skirti kartojimui. 4–17

379. Nė vienas pavaizduotas kūnas nėra taisyklingoji piramidė. *Pastaba.* b) punkte pavaizduota piramidė galėtų būti taisyklingoji, jeigu trikampį ABC laikytume taisyklingojo trikampio vaizdu.

380. Tetraedro išklotinės pavaizduotos a) ir b) brėžiniuose. Žemiau yra skaičiais nurodyta, kurias kraštines reikia suklijuoti vieną su kita, kad gautume tetraedrą.



381. Taisyklingosios keturkampės piramidės išklotinės pavaizduotos a), d), f), g) ir h) brėžiniuose.



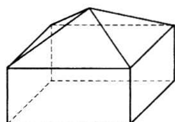
382.

	a	H	h	$S_{šon}$	S_{pav}	V
a)	6	4	5	60	96	48
b)	14	24	25	700	896	1568
c)	8	3	5	80	144	164
d)	8	0		64		0
e)	12	5	$\sqrt{61}$	$24\sqrt{61}$	$144 + 24\sqrt{61}$	240
f)	10	12	13	260	360	400
g)	x	$\frac{x\sqrt{3}}{2}$	x	$2x^2$	$3x^2$	$\frac{\sqrt{3}}{6}x^3$

Pastaba. d) punkte gavome, kad piramidės aukštinės ilgis lygus 0. Vadinasi, tokios piramidės nėra.

383. $V = \frac{500}{3}\sqrt{7}\,(\text{dm}^3)$, $S_{šon} = 200\sqrt{2}\,(\text{dm}^2)$.

384. a)



b) $2496\,\text{cm}^2$; c) $\approx 4{,}87$ g; d) $409{,}08$ Lt.

385. Tai labai svarbus uždavinys.

AB	CD	CO	OD	SO	SD	V	$S_{šon}$	S_{pav}
$6\sqrt{3}$	9	6	3	6	$3\sqrt{5}$	$54\sqrt{3}$	$27\sqrt{15}$	$27\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$
$6\sqrt{3}$	9	6	3	8	$\sqrt{73}$	$72\sqrt{3}$	$9\sqrt{219}$	$9\sqrt{3}(\sqrt{73}+3)$
12	$6\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\sqrt{\frac{328}{27}}$	8	$18\sqrt{\frac{328}{27}}$	$36\sqrt{3} + 18\sqrt{\frac{328}{27}}$
6	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$3\sqrt{3}$	$18\sqrt{2}$	$27\sqrt{3}$	$36\sqrt{3}$
8	$4\sqrt{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{7}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$\frac{32\sqrt{21}}{3}$	$40\sqrt{3}$	$56\sqrt{3}$

386. a) $S_{\text{šon}} = 72\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $S_{\text{pav}} = 126\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $V = 54\sqrt{7}\,\text{cm}^3$;
b) $S_{\text{šon}} = 216\sqrt{67}\,\text{cm}^2$, $S_{\text{pav}} = 216(\sqrt{67} + \sqrt{3})\,\text{cm}^2$, $V = 3456\sqrt{3}\,\text{cm}^3$;
c) $S_{\text{šon}} = 48\sqrt{61}\,\text{dm}^2$, $S_{\text{pav}} = (48\sqrt{61} + 96\sqrt{3})\,\text{dm}^2$, $V = 448\sqrt{3}\,\text{dm}^3$.

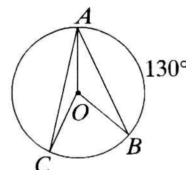
387. a) $32\sqrt{7}\,\text{cm}^2$; b) $\frac{128}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.
Nurodymas. Tai vienintelis uždavinys, kur „įdarbinama“ sąvoka *kampas tarp pasvirosios ir plokštumos*. Būtinai pasidarykite brėžinį ir pasiaiškinkite su moksleiviais, kur yra duotasis kampas. Keletas tokių uždavinių yra uždavinyne (4, 6, 12 uždaviniai, p. 79, 80).

388. a) (2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 2), (6; 4), (6; 6); b) $\frac{1}{4}$.
Pastaba. Čia patartina lošimo kauliukus „nuspalvinti“ skirtingomis spalvomis.

389. **B**.

390. a) $\frac{n}{n+m}$; b) $\frac{x}{x+y}$.

391. $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\smile BC$. Kadangi $\smile AB = 130°$, tai $\smile ACB = 360° - 130° = 230°$. Pagal sąlygą $31x + 15x = 230$, $x = 5$. Taigi $\smile BC = 15 \cdot 5 = 75°$. Tuomet $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 75° = 37{,}5°$, t. y. $37°30'$.
Atsakymas. $37°30'$.

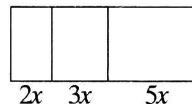


392. -4; 2.

393. **B**.

394. Plokštelės praba yra $\frac{70 \cdot 1000}{80} = 875$.
Pastaba. Tai reiškia, kad plokštelėje yra $\frac{875}{1000}$ dalys gryno sidabro.

395. Sąlyga pakankamai aiški, bet norint galima ją ir patikslinti: „Vienalytė stačiakampio formos plokštelė sveria 10 g. Kaip ją sukarpyti į tris dalis, kad kiekvienos jų masė būtų sveikasis gramų skaičius ir kad jomis būtų galima pasverti bet kokį daiktą, kurio masė lygi sveikajam gramų skaičiui nuo 1 g iki 10 g?“
Iš tikrųjų čia kalbama apie du atskirus uždavinius: 1) kokios turi būti dalių masės? ir 2) kaip stačiakampį į tokias dalis sukarpyti?
Kadangi plokštelė vienalytė, tai užtenka nurodyti santykį, kuriuo reikia padalyti vieną jos kraštinę. Pavyzdžiui, jei norime gauti 2 g, 3 g ir 5 g dalis, tai užtenka vieną iš kraštinių padalyti santykiu 2 : 3 : 5.



Primityviausias būdas — tiesioginė visų karpymo būdų perranka. Tų būdų yra 8: $1+1+8$, $1+2+7$, $1+3+6$, $1+4+5$, $2+2+6$, $2+3+5$, $2+4+4$, $3+3+4$. Perranką galima sumažinti. Pradėkime sverti kokią nors masę. Nelabai išmintinga pradėti nuo 1 g — pasverti 1 g galima ne tik turint 1 g svarelį, bet ir dedant svarelius ant skirtingų lėkštelių (pvz., $4 - 3 = 1$). Todėl pradėkime nuo 9 g svėrimo. Toje lėkštelėje, kurioje yra 9 g, nebus svarelio (kitaip toje lėkštelėje bus $\geqslant 10$ g). Vadinasi, kitoje lėkštelėje bus du svareliai, kurių bendra masė 9 g (vadinasi, trečio svarelio masė yra 1 g).
Kadangi $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$, tai reikia išnagrinėti šiuos sukarpymo būdus: 1, 8, 1; 2, 7, 1; 3, 6, 1; 4, 5, 1.
Būdas 1, 8, 1 netinka, nes taip sukarpę nepasversime 3 g masės daikto. Būdas 4, 5, 1 netinka, nes nepasversime 7 g masės daikto.
Taigi lieka šie būdai: 2, 7, 1 ir 3, 6, 1.
Bet kuris iš šių dviejų svarelių komplektų tinka. Jeigu turime pirmą komplektą, tai daiktus pasverti galima pagal schemą: $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 2+1$, $4 = 7-2-1$, $5 = 7 - 2$, $6 = 7 + 1 - 2$, $7 = 7$, $8 = 7 + 1$, $9 = 7 + 2$, $10 = 7 + 2 + 1$.
Pavyzdžiui, 4 g daiktą svertume taip: ant vienos lėkštelės dedame daiktą ir 1 g ir 2 g dalis, o ant kitos — 7 g dalį.
Antro komplekto atveju $1 = 1$, $2 = 3 - 1$, $3 = 3$, $4 = 6 + 1 - 3$, $5 = 6 - 1$, $6 = 6$, $7 = 6 + 1$, $8 = 6 + 3 - 1$, $9 = 6 + 3$, $10 = 6 + 3 + 1$.
Atsakymas. Vieną iš stačiakampio kraštinių reikia padalyti santykiu 1 : 2 : 7 arba 1 : 3 : 6 ir sukarpyti stačiakampį per tuos taškus statmenais pjūviais.

Su kūgiu mokiniai susipažino 6 ir 8 klasėse. Šiame skyrelyje pateikiamos formulės kūgio šoninio paviršiaus plotui bei kūgio tūriui skaičiuoti.

Svarbiausia šiame skyrelyje — išmokyti skaičiuoti kūgio paviršiaus plotą ir tūrį.

Pakartoti:

kaip gaunamas kūgis;

apskritimo ilgio ir skritulio ploto skaičiavimo formules.

Išmokti:

ką vadiname kūgio aukštine, sudaromąja;

kam lygus kūgio šoninio paviršiaus plotas ir tūris.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas kūgio brėžinys ir pasakoma, kaip jis gaunamas, bei apibūdinami pagrindiniai kūgio elementai: aukštinė, pagrindas, pagrindo spindulys, sudaromoji.
2. Pasakoma, kas yra kūgio šoninis paviršius, ir nurodoma šoninio paviršiaus ploto formulė: $S_{\check{s}on} = \pi r l$.

   Pastabos. 1) Pilkame fone pateiktas tos formulės išvedimas. Jis nėra sunkus, todėl jį gali suprasti nemaža dalis mokinių.

   2) Svarbu, kad mokiniai skirtų šoninio ir viso paviršiaus plotus, todėl reikia atsakyti į klaustuku pažymėtą klausimą ir užrašyti kūgio viso paviršiaus ploto formulę: $S_{pav} = S_{\check{s}on} + S_{pagr} = \pi r l + \pi r^2$.
3. Pateikiama kūgio tūrio skaičiavimo formulė: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

   Pastaba. Pilkame fone ta formulė yra paaiškinama. Paaiškinimą irgi gali suprasti dauguma mokinių.
4. Pateikiamas uždavinys kūgio paviršiaus ploto ir tūrio skaičiavimui.

   Nurodymas. Būtina, kad šį uždavinį suprastų visi mokiniai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio teminiai uždaviniai (396–407) nėra sudėtingi. Beveik visi jie sprendžiami taikant Pitagoro teoremą. Be to, reikia prisiminti, kaip skaičiuojamas ritinio viso paviršiaus plotas bei tūris. 408–414 — kartojimo uždaviniai. 18–26

396. a) 4 dm; b) 6 cm; c) 17.

397. a) 13π cm; $29{,}4\pi$ cm; b) $\frac{14}{3}\pi$ dm; $2\sqrt{2}\pi$ m.

398.

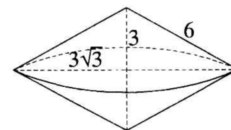
	r	H	l	S_{pagr}	$S_{\check{s}on}$	V
a)	5	12	13	25π	65π	100π
b)	1	2	$\sqrt{5}$	π	$\sqrt{5}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
c)	9	12	15	81π	135π	324π
d)	9	40	41	81π	369π	1080π
e)	12	16	20	144π	240π	768π

399. a) Padidės 3 kartus; b) sumažės 3 kartus; c) padidės 2,5 karto.

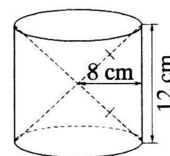
400. a) 3; b) 6; c) 12; d) 24.

401. Kūgio, gauto statųjį trikampį sukant apie trumpesnįjį statinį, tūris yra didesnis už tūrį kūgio, gauto tą patį trikampį sukant apie ilgesnįjį statinį.

402. $S_{pav} = 36\sqrt{3}\pi$ cm^2; $V = 54\pi$ cm^3.
Nurodymas. Gauto sukinio paviršiaus plotas lygus dviejų vienodų kūgių šoninių paviršių plotų sumai, o tūris — tų pačių dviejų kūgių tūrių sumai.



403. $S_{pav} = 352\pi$ cm^2; $V = 512\pi$ cm^3.
Nurodymas. Sukinio tūrį gausime iš ritinio tūrio atėmę dviejų vienodų kūgių ($r = 8$ cm, $H = 6$ cm) tūrius, o sukinio paviršiaus plotas lygus ritinio šoninio paviršiaus ir tų pačių dviejų kūgių šoninių paviršių plotų sumai.

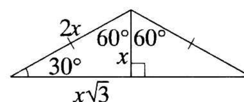


404. a) $V = 16\pi$ cm^3, $S_{\check{s}on} = 4\sqrt{22}\pi$ cm^2; b) $V = 32$ cm^3, $S_{\check{s}on} = 16\sqrt{10}$ cm^2.

405. a) $S_{k.\check{s}on} = 60\pi$ dm^2; $S_{p.\check{s}on} = 18\sqrt{91}$ dm^2;
b) $V_{k.} = 96\pi$ dm^3, $V_{p.} = 144\sqrt{3}$ dm^3.

406. $\approx 7{,}9$ t.
Nurodymas. Remkitės formule $m = \rho \cdot V$; čia V — kūgio tūris, m — smėlio masė, ρ — smėlio tankis.

407. $V = \frac{128\sqrt{3}}{3}\pi\ \mathrm{dm}^3$.



Nurodymas. Trikampio šoninės kraštinės ilgį pažymėję $2x$, raskite trikampio aukštinę ir pusę pagrindo ilgio. Šį uždavinį gali spręsti visi mokiniai.

408. 2520.

Nurodymas. Taikykite kombinatorinę daugybos taisyklę.

409. Metant monetą 3 kartus galimos tokios baigtys: hhh, hhs, hsh, shh, hss, shs, ssh, sss.

a) hhs, hsh, shh, hss, shs, ssh, sss; b) $\frac{7}{8}$.

410. a) 2; 5; b) -1; $\frac{3}{4}$.

411. Kadangi $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$, tai $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$.

412. $BD = 1{,}5\sqrt{11}\ \mathrm{m} \approx 5\ \mathrm{m}$.

413. a) $2 \cdot 10^3$; b) $1{,}6 \cdot 10^{-2}$; c) $2 \cdot 10^{-4}$; d) $2 \cdot 10^{-3}$.

414. a) 160; b) $\frac{5}{27}$.

Skyrelyje glaustai apibrėžiama sfera ir rutulys, pateikiamos formulės sferos paviršiaus plotui ir rutulio tūriui skaičiuoti. Svarbiausia, kad mokiniai skirtų sąvokas sfera ir rutulys bei mokėtų apskaičiuoti sferos paviršiaus plotą ir rutulio tūrį.

Pakartoti:
apskritimo ir skritulio sąvokas;
apskritimo ilgio ir skritulio ploto formules.

Išmokti:
apibūdinti sferą ir rutulį;
apskaičiuoti sferos paviršiaus plotą ir rutulio tūrį.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami sferiškų ir rutuliškų kūnų pavyzdžiai. Nurodoma, kaip gaunami sfera ir rutulys, bei pateikiami jų apibrėžimai ir paviršiaus ploto bei tūrio skaičiavimo formulės: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

   Nurodymai. 1) Paprašykite mokinių nurodyti daugiau sferiškų ir rutuliškų kūnų pavyzdžių.

   2) Sferos paviršiaus ploto ir rutulio tūrio formulės nėra įrodytos, nes jų įrodymas sudėtingas.

   3) Vadovėlio pilkame fone pateiktas įdomus faktas: „Įbrėžtos į ritinį sferos paviršiaus plotas lygus ritinio šoninio paviršiaus plotui“. Remiantis tuo faktu lengviau įsiminti sferos paviršiaus ploto formulę.

2. Pateikiamas pavyzdys, iliustruojantis sferos paviršiaus ploto ir rutulio tūrio skaičiavimą.

   Nurodymas. Galima paklausti mokinių, koks yra oro tūris kamuolyje, jei kamuolio odos storis lygus 0,5 cm.

3. Pilkame fone nagrinėjamos sferos ir plokštumos tarpusavio padėtys.

   Nurodymai. 1) Tai medžiaga, analogiška apskritimo ir tiesės tarpusavio padėties nagrinėjimui.

   2) Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog plokštumos ir sferos susikirtime gaunamas apskritimas. (Plokštumos ir rutulio sankirta yra skritulys.)

   3) Plokštuma, kirsdama sferą ar rutulį, juos dalija į dvi dalis — nuopjovas. Šiame skyrelyje pateiktos formulės rutulio nuopjovos tūriui ir paviršiaus plotui skaičiuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio teminiai pratimai ir uždaviniai (415–424) skirti formuoti mokinių įgūdžiams skaičiuojant rutulio tūrį ir jo paviršiaus plotą. Kartojimui skirti 425–432 uždaviniai. 27–38

415. a) $484\pi \approx 1520\,\text{cm}^2$; b) $\frac{5324}{3}\pi \approx 5572{,}5\,\text{cm}^3$. *Pastaba.* Sakome, kad kamuolio išorinis ir vidinis skersmenys yra tokie patys.

416. a) $\frac{5776}{\pi} \approx 1839{,}5\,\text{cm}^2$; b) $\frac{219\,488}{3\pi^2} \approx 7420{,}5\,\text{cm}^3$.

417.

R	S	V
3	36π	36π
15	900π	4500π
$\sqrt[3]{900}$	$4\pi\sqrt[3]{810\,000}$	1200π

Pastaba. Kadangi ne visi mokiniai turi skaičiuoklius, kuriais galima apskaičiuoti apytikslę kubinės šaknies iš duotojo skaičiaus reikšmę, galima pakeisti paskutinės eilutės sąlygą imant $V = 2304\pi$. Tuomet $R = 12$, $S = 576\pi$.

418.

R	d	r
65	33	56
85	77	36

Pastaba. Apatinę lentelės eilutę reikia užpildyti laisvai pasirinkus, pavyzdžiui, R ir r reikšmes.

419. Kadangi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, o $S = 4\pi R^2$, tai $\frac{V}{S} = \frac{4\pi R^3}{3} : 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 4\pi R^2} = \frac{R}{3}$. Taigi $\frac{R}{3} = 3{,}5$. Iš čia $R = 10{,}5$. (Iš patirties žinome, kad tinklinio kamuolio spindulys lygus 10,5 cm, o ne dm ar m.)

Atsakymas. a) 21; b) $441\pi \approx 1384{,}74$; c) $1543{,}5\pi \approx 4846{,}59$.

420. Merkurijus: $S = 23\,425\,600\pi\ \text{km}^2$, $V = 1{,}889665067 \cdot 10^{10}\pi\ \text{km}^3$,
Venera: $S = 151\,290\,000\pi\ \text{km}^2$, $V = 3{,}101445 \cdot 10^{11}\pi\ \text{km}^3$,
Marsas: $S = 46\,104\,100\pi\ \text{km}^2$, $V = 5{,}217447317 \cdot 10^{10}\pi\ \text{km}^3$,
Jupiteris: $S = 20\,506\,240\,000\pi\ \text{km}^2$, $V = 4{,}894155947 \cdot 10^{14}\pi\ \text{km}^3$,
Saturnas: $S = 14\,232\,490\,000\pi\ \text{km}^2$, $V = 2{,}829893428 \cdot 10^{14}\pi\ \text{km}^3$,

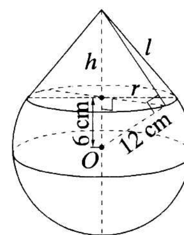
Uranas: $S = 2\,218\,410\,000\pi$ km^2, $V = 1{,}74145185 \cdot 10^{13}\pi$ km^3,
Neptūnas: $S = 2\,601\,000\,000\pi$ km^2, $V = 2{,}21085 \cdot 10^{13}\pi$ km^3,
Plutonas: $S = 35\,402\,500\pi$ km^2, $V = 3{,}510747917 \cdot 10^{10}\pi$ km^3,
Žemė: $S = 162\,817\,600\pi$ km^2, $V = 3{,}462587627 \cdot 10^{11}\pi$ km^3,
Mėnulis: $S = 12\,082\,576\pi$ km^2, $V = 6\,999\,839\,029\pi$ km^3.

421. a) $\frac{8788}{3}\pi \approx 9198\,\text{cm}^3$.
b) Didžiojo arbūzo tūris (su žieve): $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 20^3 \approx 33\,493\,\text{cm}^3$, o mažųjų — $V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 14\,130\,\text{cm}^3$ ir $V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 16{,}75^3 \approx 19\,675\,\text{cm}^3$. Sakykime, kad arbūzo tankis yra $\rho\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Tuomet didysis arbūzas sveria $m = V \cdot \rho = 33\,493 \cdot \rho\,(\text{g})$, o mažieji — $m_1 = 14\,130 \cdot \rho\,(\text{g})$ ir $m_2 = 19\,675 \cdot \rho\,(\text{g})$. Palyginkime didžiojo arbūzo ir dviejų mažųjų arbūzų mases: $m_1 + m_2 = 14\,130 \cdot \rho + 19\,675 \cdot \rho = 33\,805 \cdot \rho\,(\text{g})$. Taigi abu mažieji arbūzai sveria $33\,805 \cdot \rho - 33\,493 \cdot \rho = 312 \cdot \rho$ (g) daugiau negu didysis arbūzas.
Apskaičiuokime visų trijų arbūzų valgomų dalių mases: $\overline{m} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 19^3 \cdot \rho \approx$ $\approx 28\,716 \cdot \rho\,(\text{g})$, $\overline{m_1} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 14^3 \cdot \rho \approx 11\,488 \cdot \rho\,(\text{g})$, $\overline{m_2} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15{,}75^3 \cdot \rho \approx$ $\approx 16\,357 \cdot \rho\,(\text{g})$.
Palyginkime didžiojo arbūzo ir abiejų mažųjų arbūzų valgomų dalių mases: $\overline{m_1} + \overline{m_2} = 11\,488 \cdot \rho + 16\,357 \cdot \rho = 27\,845 \cdot \rho\,(\text{g})$.
Taigi nors abu mažieji arbūzai ir buvo truputį sunkesni už didįjį arbūzą, tačiau didžiojo arbūzo valgomoji dalis $28\,716 \cdot \rho - 27\,845 \cdot \rho = 871 \cdot \rho$ gramų sunkesnė už abi mažesniųjų arbūzų valgomąsias dalis. Vadinasi, naudingiau pirkti didelį arbūzą.

422. a) $21{,}195\,\text{cm}^3$; b) 800.

423. a) $1{,}368\pi \approx 4{,}296\,\text{m}^3$. *Nurodymas.* Cisternos tūris lygus rutulio, kurio spindulys 0,6 m, ir ritinio, kurio spindulys 0,6 m, o aukštis 3 m, tūrių sumai.
b) $5{,}04\pi \approx 15{,}83\,\text{m}^2$. *Nurodymas.* Cisternos paviršiaus plotas lygus rutulio paviršiaus ir ritinio šoninio paviršiaus plotų sumai.
c) $4{,}296\,\text{m}^3 = 4296\,\text{dm}^3 = 4296\,\ell = 42{,}96 \cdot 10^2\,\ell = 42{,}96\,\text{h}\ell$.

424. Kūnas sudarytas iš rutulinės nuopjovos, kurios spindulys r, o aukštinė 18 cm, ir ant jos uždėto kūgio, kurio spindulys r, o aukštinė h. Akivaizdu, kad $r^2 = 12^2 - 6^2 = 108$, $r = 6\sqrt{3}$ cm. Kita vertus, r yra atkarpų, kurių ilgiai 6 ir h, geometrinis vidurkis, t. y. $r^2 = 6 \cdot h$. Iš čia: $h = \frac{108}{6} = 18$ (cm). Kūgio sudaromoji $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{108 + 324} = 12\sqrt{3}$ (cm). Kūno tūris: $V = \pi \cdot 12 \cdot 18^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 18^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 18 = 2592\pi \approx 8139\,(\text{cm}^3)$.
Kūno paviršiaus plotas: $S = 2\pi \cdot 12 \cdot 18 + \pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 648\pi \approx 2035\,(\text{cm}^2)$.
Atsakymas. $V = 2592\pi \approx 8139\,\text{cm}^3$, $S = 648\pi \approx 2035\,\text{cm}^2$.



425. a) (1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5); b) $\frac{1}{4}$.

426. 6.

427. a) $\frac{1}{4a(a+1)}$; b) $\frac{1}{5x}$; c) $\frac{\sqrt{a}}{a}$; d) $\frac{2\sqrt{x}}{x}$.

428. a) 12 cm. *Nurodymas.* Kiekvieno apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios.
b) 6 cm; c) 12 cm.

429. 19,25 m.

430. Sakykime, kad upės tėkmės greitis yra x km/h. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $(18 + x) \cdot 1 + (16 - x) \cdot 1{,}5 = 41$, $x = 2$.
Atsakymas. 2 km/h.

431. Sakykime, kad viena brigada turėjo pasiūti x porų batų, o kita — y. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} x + y = 360, \\ 1{,}12x + 1{,}1y = 400; \end{cases}$ $x = 200$, $y = 160$.
Atsakymas. 16 ir 24.

432. b) $31{,}3\,\text{m}^2$; c) $21{,}91\,\text{m}^3$.
Nurodymas. Žr. 319 uždavinio sprendimą. Pratekančio per sekundę vandens tūris atitinka tūrį prizmės, kurios pagrindas yra upės vagos skersinis pjūvis, o aukštis lygus 0,7 m.

9.5. Žemė

Šiame skyrelyje mokiniai trumpai supažindinami su geografinėmis koordinatėmis. Turint daugiau laiko galima būtų kalbėti ir apie 24 laiko juostas. Skyrelis visiems mokiniams neprivalomas, bet įdomus ir praktiškai naudingas.

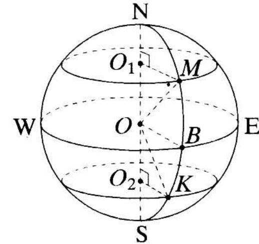
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 433–438 pratimai; kartojimui – 439–445. 39, 40

433. $12\,800\pi$ km $\approx 40\,192$ km.

434. 6400π km $\approx 20\,096$ km.

435. Norint apskaičiuoti duotų lygiagrečių ilgius, reikia rasti apskritimo, kuriuo plokštuma kerta sferą, spindulį.



1) Kai $\angle MOB = 45°$, tai $\angle O_1OM = 45°$ ir $\triangle OO_1M$ – status lygiašonis. Tuomet $2O_1M^2 = R^2$, $O_1M = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{6400\sqrt{2}}{2} = 3200\sqrt{2}$ (km), o 45°N lygiagretės ilgis lygus $2\pi \cdot 3200\sqrt{2} \approx 28\,420$ (km).

2) Kai $\angle KOB = 60°$, tai $\angle O_2OK = 30°$. Vadinasi, stačiojo trikampio OO_2K statinis O_2K yra prieš 30° kampą, todėl $O_2K = \frac{1}{2}R = \frac{6400}{2} = 3200$ (km). Tuomet 60°S lygiagretės ilgis lygus $2\pi \cdot 3200 \approx 20\,096$ (km).

3) Kai $\angle MOB = 30°$, tai $\angle O_1OM = 60°$, o $\angle OMO_1 = 30°$. Vadinasi, stačiojo trikampio OO_1M statinis OO_1 yra prieš 30° kampą, todėl $OO_1 = \frac{1}{2}R$. Tuomet $O_1M = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{6400}{2}\sqrt{3} = 3200\sqrt{3}$ (km). Taigi 30°N lygiagretės ilgis lygus $2\pi \cdot 3200\sqrt{3} \approx 34\,807$ (km).

Atsakymas. $\approx 28\,420$ km, $\approx 20\,096$ km, $\approx 34\,807$ km.

436. a) ≈ 5582 km; b) ≈ 7257 km.

437. Atstumas tarp taškų: a) C ir B lygus ≈ 8932 km; b) K ir M lygus ≈ 4466 km.

438. K(30°E; 30°N), P(30°E; 60°N), ≈ 3349 km.

439. a) $x + 1$; b) $y - 3$.

440. a) -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; b) sprendinių nėra;

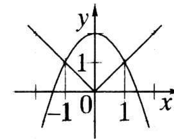
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

c) $x^2 + |x| - 2 = 0$.

Taigi turėsime išspręsti dvi lygtis:

1) $x^2 + x - 2 = 0$ ($x \geqslant 0$); $x_1 = -2$ (netinka), $x_2 = 1$;

2) $x^2 - x - 2 = 0$ ($x < 0$); $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (netinka).



Pastaba. Galima pasiūlyti moksleiviams išspręsti šią lygtį ir grafiškai, vienoje koordinačių plokštumoje nubraižius funkcijų $y = |x|$ ir $y = -x^2 + 2$ grafikus.

Atsakymas. -1; 1.

441. $\frac{a^2-3}{a^2-9}$.

442. a) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $2 - \sqrt{5}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $2 + \sqrt{5}$; b) -3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 3.

443. Lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $D > 0$. Turime:

a) $x^2 - 4x + k = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 16 - 4k$. Taigi sprendžiame nelygybę $16 - 4k > 0$, $k < 4$;

b) $kx^2 - 4x + 1 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 = 16 - 4k$; $16 - 4k > 0$, $k < 4$.

Atsakymas. a) $k < 4$; b) $k < 4$.

444. a) Kadangi $D = 20 > 0$, tai duotoji lygtis turi du skirtingus sprendinius. Nebūtina juos rasti, norint parašyti naująją lygtį. Pagal Vijeto teoremą duotosios lygties sprendinių suma lygi 6, o sandauga yra 4. Kadangi naujosios lygties sprendiniai $x_1 = x_1' + 2$, o $x_2 = x_2' + 2$, tai $x_1 + x_2 = x_1' + 2 + x_2' + 2 = 10$, o $x_1 \cdot x_2 = (x_1' + 2)(x_2') = x_1' \cdot x_2' + 2(x_1' + x_2') + 4 = 20$. Taigi, naujoji lygtis yra $a(x^2 - 10x + 20) = 0$, $a \neq 0$.

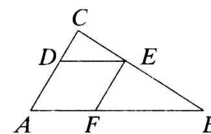
b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = A$.

1) Jeigu x_1 ir x_2 yra duotosios lygties sprendiniai, tai $A = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{6^2-2\cdot4}{4^2} = 1{,}75$.

2) Jeigu x_1 ir x_2 yra naujosios lygties sprendiniai, tai $A = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{10^2-2\cdot20}{20^2} = 0{,}15$.

Atsakymas. a) $a(x^2 - 10x + 20) = 0$, $a \neq 0$; b) 1,75 (0,15).

445. *Duota*: $\triangle ABC$, keturkampis $ADEF$ – rombas, $\angle A$ – bendras, $AB = c$, $AC = b$.



Rasti: DE.

Sprendimas. Kadangi $ADEF$ – rombas, tai $AD \parallel EF$, $AF \parallel DE$. Pagal Talio teoremą turėsime, kad $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$. Vadinasi, $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Tuomet $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$, $\frac{c}{DE} = \frac{b}{AC-AD}$, $\frac{c}{DE} = \frac{b}{b-DE}$ ir $DE = \frac{bc}{b+c}$.

Atsakymas. $\frac{bc}{b+c}$.

10. PAPRASTIEJI PROCENTAI EKONOMIKOJE

Kaip ir ankstesniuose naujuosiuose vadovėliuose, taip ir šiame tęsiamas ekonomikos klausimų nagrinėjimas. Šiame vadovėlio skyriuje jie siejami su *paprastaisiais procentais*.

Pastabos. 1) Kitų mokslo metų pradžioje (10 klasėje) ekonomikos skyriuje bus nagrinėjami klausimai, kurie siejasi su *sudėtiniais procentais*. Jei nespėjote šios temos išnagrinėti 9 klasėje, ją galima palikti 10 klasei.

2) Dabar mokyklose įvestas atskiras ekonomikos kursas, ko nebuvo rašant šį vadovėlį. Todėl mokytojai ekonomikos klausimų galėtų ir nenagrinėti... Bet ši tema labai glaudžiai siejasi su realiu gyvenimu. Be to, šis skyrius matematine prasme siejamas su procentų uždavinių sprendimu, ką išmokyti yra labai svarbu.

Šis skyrius yra gana platus, bet matematine prasme yra nesunkus — sprendžiami paprastųjų procentų uždaviniai. Be to, du skyreliai (10.2 ir 10.5) yra neprivalomi. Todėl šio skyriaus nagrinėjimas neturėtų užimti daug laiko ir tam neturėtų pakenkti artėjančios vasaros bei mokinių nuovargio požymiai.

Šio skyriaus struktūrą trumpai nusakyti galima taip:

1) nagrinėjamos paskolos, už kurias mokamos paprastosios palūkanos (10.1, 10.2 ir 10.3 skyreliai);

2) nagrinėjami pridėtosios vertės (PVM) ir pelno mokesčiai (10.4 skyrelis);

3) nagrinėjami su verslo organizavimu susiję klausimai siekiant parodyti, į ką būtina atsižvelgti organizuojant verslą (10.5 skyrelis).

Nurodymai. 1) Nagrinėjant *paskolų* teikimą skaičiuojamos *paprastosios palūkanos* ir paskolos *grąžintina suma* priklausomai nuo pasiskolintos *pradinės* pinigų sumos, palūkanų normos ir jų skaičiavimo laiko. Savotiška paskolos rūšis yra *vertybiniai popieriai*: *obligacijos*, *taupymo lakštai*. Šiuo atveju skolintojas (kreditorius) yra žmogus, o skolininkas (kredito gavėjas) — bankas ar valstybė. Obligacijos *pardavimo kaina* yra *paskolos dydis*, o *nominalioji vertė* — *grąžintina suma* po tam tikro laikotarpio už sutartus metinius paprastuosius procentus. *Pirkimas išsimokėtinai* — taip pat paskola tam tikram laikotarpiui už sutartus metinius paprastuosius procentus. Paskolų (kreditų) skaičiavimai siejami su funkcinių priklausomybių nagrinėjimu. *Paprastųjų palūkanų* ir *grąžintinų sumų* reikšmių sekos yra aritmetinės progresijos.

2) Baigdami nagrinėti pirmuosius du skyrelius mokiniai turėtų suvokti, kad turint laisvų pinigų naudingiausia būtų investuoti juos į *akcijas*, bet tai didelė rizika. Mažiau naudinga ir beveik be rizikos pirkti *obligacijas*, *taupymo lakštus* arba tiesiog paskolinti — *vekselių* ar kitų gerai apiformintų paskolos dokumentų pavidalu. Laikyti pinigus banke — dar mažiau naudinga, bet mažiausiai rizikinga (nebent subankrutuotų bankas, bet ir tuo atveju yra valstybės garantijos).

3) Sprendžiant uždavinius svarbiausia — iš tarpusavyje susietų keturių dydžių — palūkanų arba grąžintinos sumos, pasiskolintos pradinės pinigų sumos, sutartų metinių paprastųjų palūkanų ir tam tikro laikotarpio trukmės — mokėti apskaičiuoti vieną iš jų žinant kitus tris. Tai tiesiog lygties su vienu nežinomuoju sprendimas.

Nagrinėdami šį skyrių nevenkite diskusijų, aktyvių mokymo metodų, praveskite pamokas linksmai. Leiskite mokiniams patiems kurti uždavinius, kelti klausimus, naudotis skaičiuokliais ir kompiuteriais.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti spręsti paprastus uždavinius, susijusius su paskolomis, kai reikia skaičiuoti paprastąsias metines palūkanas.
2. Gebėti spręsti paprastus uždavinius, susijusius su pridėtosios vertės ir pelno mokesčio skaičiavimais.
3. Suprasti pirkimo išsimokėtinai esmę.

Pagrindinis lygmuo:

4. Mokėti sudaryti lenteles ir grafiškai vaizduoti paskolos palūkanų ir grąžintinos sumos priklausomybę nuo laiko.
5. Suprasti ir gebėti pagrįsti formulę $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$, čia S_t — grąžintina suma po t metų, S — pasiskolinta suma, p — paprastųjų palūkanų norma. Mokėti remtis šia formule sprendžiant uždavinius.
6. Suvokti į tą formulę įeinančio daugiklio $\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$ prasmę.
7. Mokėti apskaičiuoti pirkimo išsimokėtinai paprastąsias palūkanas.

Aukštesnis lygmuo:

8. Suprasti, kad tiek paskolos palūkanas P_t, tiek grąžintiną sumą S_t išreiškiantys skaičiai sudaro aritmetinę progresiją.
9. Išvesti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
10. Spręsti uždavinius, kai paprastosios palūkanos skaičiuojamos ne tik už metus, bet ir kitokiais laiko tarpsniais, pavyzdžiui, už mėnesius ar už dienas.
11. Suprasti, kas yra obligacijos, akcijos, vekseliai.
12. Mokėti paaiškinti, į ką reikia atsižvelgti organizuojant verslą.

Skyrelyje pakartojamos *palūkanų* ir *palūkanų normos* (*metinių procentų*) sąvokos (Matematika 7, II dalis, 117 p.). Kadangi 9 klasėje nagrinėjamos tik *paprastosios palūkanos*, tai tekste kai kur sakoma tiesiog palūkanos. Todėl mokiniams reikėtų vis priminti, kad omenyje turima paprastosios palūkanos. (10 klasėje bus nagrinėjamos dar ir *sudėtinės palūkanos*.) Išaiškinama, kaip skaičiuojamos paskolos S *paprastosios palūkanos* P_t ir *grąžintina suma* S_t priklausomai nuo metinių paprastųjų procentų p ir laiko t, išvedamos atitinkamos formulės. Atkreipkite dėmesį, kad 2 pavyzdyje be reikalo įrašytas žodis „visõs" sakinyje: „Jei skolininkas negrąžina *visos* skolos, tai po sekančių metų jam vėl teks sumokėti 150 Lt palūkanų". Šiame skyrelyje mes nenagrinėjame paskolos atidavimo dalimis, tad nėra aptarta, kas bus, jeigu, pavyzdžiui, skolininkas būtų grąžinęs pusę arba trečdalį skolos.

Nubraižę palūkanų P_t ir grąžintinos sumos S_t grafikus matome, kad tai yra funkcijų $y = kx$ ir $y = kx + b$ grafikai. Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog paprastosios palūkanos ir grąžintina suma tiesiškai priklauso nuo laiko: kuo ilgesniam laikui skolinami pinigai, tuo didesnę sumą reikės grąžinti. Parodoma, kad paskolos *paprastųjų palūkanų* ir *grąžintinos sumos* reikšmių sekos yra aritmetinės progresijos (Matematika 9, I dalis, 28 p.), kurių skirtumas — vienerių metų palūkanos.

Kaip papildoma medžiaga (ne visiems mokiniams) pateikiama aritmetinės progresijos n pirmųjų narių sumos formulė. Apskritai aritmetinės progresijos formulių 9 klasėje nagrinėti nereikia. Paskolų atveju šios progresijos bet kurį narį, t. y. *palūkanas* (*grąžintiną sumą*), galima skaičiuoti labai paprastai, vis pridedant skirtumą — vienerių metų palūkanas. Nesunku rasti ir nedidelio kiekio pirmųjų narių sumą. Naudotis n-tojo nario ar n pirmųjų narių sumos formulėmis verta tik tuo atveju, jeigu n yra pakankamai didelis skaičius. Svarbiausia, kad realioje situacijoje mokiniai atpažintų aritmetinę progresiją, suvoktų, kaip galima apskaičiuoti jos bet kurį narį.

Su stipresniaisiais mokiniais galima nagrinėti, kaip skaičiuojamos paskolos *paprastosios palūkanos* už laikotarpį, lygų m *mėnesių* ar d *dienų*, taip pat grąžintina suma po m *mėnesių* ar d *dienų*.

Pakartoti:

procento, palūkanų ir palūkanų normos sąvokas;

metų, mėnesių ir dienų reiškimą smulkesniais (stambesniais) laiko vienetais;

funkcijų $y = kx$ ir $y = kx + b$ grafikų braižymą;

aritmetinės progresijos apibrėžimą ir n-tojo nario formulę.

Išmokti:

apskaičiuoti paskolos palūkanas ir grąžintiną sumą, kai žinoma paskolos pradinė suma S, metiniai procentai p ir skolinimo laikotarpis t;

pavaizduoti paskolos palūkanas bei grąžintiną sumą grafikais ir skaityti juos;

parašyti ir apskaičiuoti paskolos palūkanų ir grąžintinos sumos reikšmių sekas bei mokėti atpažinti šias sekas kaip aritmetines progresijas;

apskaičiuoti arba paskolos pradinę sumą S, arba metinius procentus p, arba paskolos laikotarpį t iš juos siejančių lygčių;

susieti paprastųjų palūkanų skaičiavimą su tiesine priklausomybe ir aritmetine progresija;

susipažinti su paskolos palūkanų ir grąžintinos sumos skaičiavimais, kai laikas išreikštas ne tik metais, bet ir mėnesiais, dienomis;

taikyti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę ir ją įsiminti;

suprasti paskolos (kredito) grąžinimo lygiomis dalimis su pastoviomis palūkanomis plano sudarymą.

Šiame skyrelyje:

1. Susipažįstama su *paskolos (kredito)* teikimo ir gavimo svarbiausiu elementu — *palūkanomis*.

> *Palūkanos — tai mokestis už naudojimąsi pa(si)skolintais pinigais.*

2. Nagrinėjamos palūkanos, kurios skaičiuojamos tik nuo pasiskolintos sumos ir neatsižvelgiama į jau grąžintą paskolos dalį. Jos vadinamos *paprastosiomis*.
3. Pirmu ir antru pavyzdžiais aptariamos sąvokos *palūkanų norma* (*metiniai procentai*), *palūkanos už t metų*, *grąžintina suma po t metų*.
4. Formuojamas paprastųjų palūkanų ir grąžintinos sumos skaičiavimo algoritmas, atitinkantis formules $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$ ir $S_t = S\big(1 + \frac{p}{100} \cdot t\big)$, kai žinomas paskolos (kredito) dydis S, metiniai procentai p ir pinigų pasiskolinimo laikotarpis (metais) t. Formules įsiminti nebūtina. Svarbu suprasti ir mokėti užrašyti atitinkamą skaičiavimo algoritmą.
5. Dažnai įdomu, kiek kartų grąžintina suma didesnė už paskolą, kai žinomi metiniai paprastieji procentai p ir paskolos grąžinimo laikas (metais) t. Atsakymas į vadovėlyje iškeltą klausimą — 2 kartus, nes $1 + \frac{10}{100} \cdot 10 = 2$.
6. Parodoma, kad *paprastųjų palūkanų* P_t grafikas atitinka funkcijos $y = kx$, o *grąžintinos sumos* S_t — funkcijos $y = kx + b$ grafikus; čia x — metai, k — palūkanos už vienerius metus, o b — pasiskolinta suma.
7. Primenama, kad paprastųjų palūkanų ir grąžintinos sumos reikšmių (priklausomai nuo metų skaičiaus t ir esant metinėms paprastosioms palūkanoms p procentų) sekos yra aritmetinės progresijos, kurių skirtumas d — metinės paprastosios palūkanos.

10. Stipresnieji mokiniai gali skaičiuoti paskolos palūkanas ar grąžintiną sumą už m mėnesių ar d dienų laikotarpį. Šiuo atveju m mėnesių laiką reikia išreikšti metais kaip $\frac{m}{12}$ arba d dienų laiką — kaip $\frac{d}{360}$. Po to galima skaičiuoti pagal jau aptartus algoritmus.

11. Antru išspręstu uždaviniu mokoma sudaryti paskolos (kredito) grąžinimo planą, kai skola grąžinama lygiomis dalimis sumokant dar ir laikotarpio palūkanas. Tokios paskolos (kreditai) dar vadinamos *pastoviųjų palūkanų paskolomis (kreditais)*. Čia palūkanos išlieka tos pačios per visą grąžinimo laikotarpį.

12. Pateikiama trumpų žinių iš bankų istorijos.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 447–464 uždaviniai, o kartojimo — 465–474. 1–34

447. Reikės mokėti palūkanų:

a) $3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot 2 = 1080\,(\text{Lt})$; b) $3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot 4 = 2160\,(\text{Lt})$;

c) $3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot 6{,}5 = 3510\,(\text{Lt})$; d) $3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{10}{12} = 450\,(\text{Lt})$;

e) $3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{300}{360} = 450\,(\text{Lt})$.

Nurodymas. Dirbant su stipresniais mokiniais visai nebūtina kiekvieną kartą atlikti tuos pačius griozdiškus skaičiavimus. Pratinkime mokinius kiek galima suprastinti formules įstačius duotus duomenis. Palūkanas apskaičiuojame remdamiesi formule $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$. Kai $S = 3600\,\text{Lt}$, $p = 15\%$, tai $P_t = 3600 \cdot \frac{15}{100} \cdot t = 540t$. Taigi gavome visai paprastutę formulę, kur reikės įstatyti tik t reikšmę. Atkreipkite dėmesį, kad punkte d) reikės vietoj t įrašyti $\frac{m}{12}$ (m — mėnesių skaičius), o punkte e) — $\frac{d}{360}$ (d — dienų skaičius).

448. Grąžintina suma bus:

a) $4000 + 4000 \cdot \frac{12}{100} \cdot 2 = 4000(1 + 0{,}24) = 4960\,(\text{Lt})$;

b) $4000 + 4000 \cdot \frac{12}{100} \cdot 3 = 4000(1 + 0{,}36) = 5440\,(\text{Lt})$;

c) $4000 + 4000 \cdot \frac{12}{100} \cdot 5{,}5 = 4000(1 + 0{,}66) = 6640\,(\text{Lt})$;

d) $4000 + 4000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{11}{12} = 4000(1 + 0{,}11) = 4440\,(\text{Lt})$;

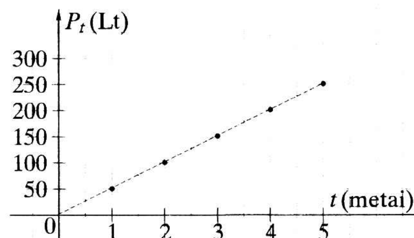
e) $4000 + 4000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{200}{360} = 4000(1 + 0{,}0(6)) = 4266{,}6666\ldots \approx 4266{,}67\,(\text{Lt})$.

Nurodymas. Kaip ir 447 uždavinyje, formulę galima suprastinti. Grąžintiną sumą apskaičiuojame pagal formulę $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$. Kai $S = 4000\,\text{Lt}$, $p = 12\%$, tai $S_t = 4000\left(1 + \frac{12}{100} \cdot t\right) = 4000 + 480t$. Belieka įstatyti t reikšmę. Atkreipkite dėmesį į d) ir e) punktus, kur laiko tarpsnis duotas mėnesiais ir dienomis.

449. Palūkanos už metus yra $500 \cdot \frac{10}{100} = 50\,(\text{Lt})$.

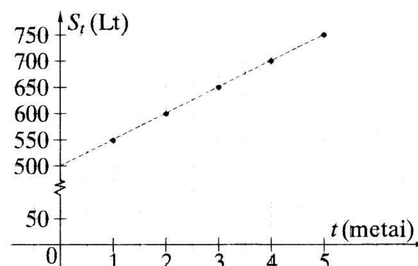
a)

t	1	2	3	4	5
P_t	50	100	150	200	250



b)

t	1	2	3	4	5
S_t	550	600	650	700	750



450. a) $2880 = 8000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 4$; $2880 = 320p$; $p = 9\,\%$;

b) $675 = 1500 \cdot \frac{7{,}5}{100} \cdot t$; $675 = 112{,}5t$; $t = 6$ metai.

c) Užduotis dviprasmiška:
jeigu 875 Lt yra palūkanos, tai $875 = S \cdot \frac{7}{100} \cdot 5$; $S = 2500\,\text{Lt}$;
jeigu 875 Lt yra grąžintina suma, tai $875 = S\left(1 + \frac{7}{100} \cdot 5\right)$; $S \approx 648{,}15\,\text{Lt}$;

d) $9525 = 7500\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 3\right)$; $1{,}27 = 1 + 0{,}03p$; $p = 9\,\%$;

e) $16400 = 12000\left(1 + \frac{11}{100} \cdot t\right)$; $\frac{41}{30} = 1 + \frac{11t}{100}$; $t = 3\frac{1}{3}$ m., t. y. 3 m. 4 mėn;

f) $14205 = S\left(1 + \frac{10,5}{100} \cdot \frac{21}{12}\right)$; $14205 = 1,18375 \cdot S$; $S = 12000$ Lt.

451. Po trejų metų bus atsiimta:

a) $1200 + 1200 \cdot \frac{10}{100} \cdot 3 = 1200(1 + 0,3) = 1560$ (Lt);

b) $1200 + 1200 \cdot \frac{12}{100} \cdot 3 = 1200 \cdot 1,36 = 1632$ (Lt);

c) $1200\left(1 + \frac{14}{100} \cdot 3\right) = 1200 \cdot 1,42 = 1704$ (Lt);

d) $1200\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 3\right) = 1200 + 36p$ (Lt).

452. Sprendimas analogiškas 447 uždavinio sprendimui.

Pastaba. 2 metai 2 mėnesiai ir 2 dienos atitinka $360 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 = 782$ (dienas).

a) 64 800 Lt; b) 38 880 Lt; c) 58 320 Lt; d) 5400 Lt; e) 180 Lt; f) 28 152 Lt.

453. Sprendimas analogiškas 450 e) uždavinio sprendimui. Tačiau čia vėlgi galima iškart supaprastinti skaičiavimus. Laiko tarpsnį t apskaičiuojame remdamiesi formule $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$. Kai $S = 6000$ Lt, $S_t = 10500$ Lt, tai $10500 = 6000\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$ ir $t = \frac{75}{p}$.

Atsakymas. a) 3 m.; b) 3,75 m.; c) 5 m.; d) 6,25 m.

454. a) $270 = S \cdot \frac{9}{100} \cdot 2$; $270 = 0,18 \cdot S$; $S = 1500$ Lt;

b) $3600 = S \cdot \frac{12}{100} \cdot 3$; $3600 = 0,36 \cdot S$; $S = 10000$ Lt;

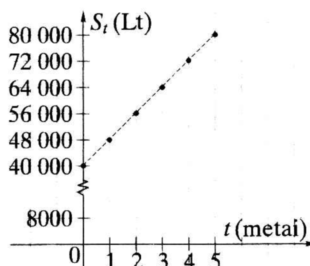
c) $300 = S \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{9}{12}$; $S = \frac{300 \cdot 100 \cdot 12}{8 \cdot 9}$; $S = 5000$ Lt;

d) $25 = S \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{40}{360}$; $S = \frac{25 \cdot 100 \cdot 360}{10 \cdot 40}$; $S = 2250$ Lt.

455. a) Darbuotojas turės grąžinti $40000 + 40000 \cdot \frac{20}{100} \cdot 5 = 80000$ (Lt).

b)

t	1	2	3	4	5
S_t	48 000	56 000	64 000	72 000	80 000



456. Šiame skyriuje nagrinėjame tik paskolas su *paprastosiomis metinėmis palūkanomis*. Palūkanos per metus sudarė $39000 - 34500 = 43500 - 39000 = 48000 - 43500 = 4500$ (Lt).

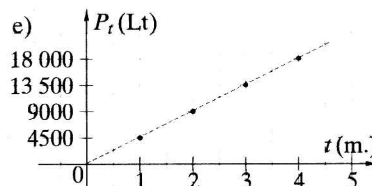
a) $34500 - 4500 = 30000$ (Lt);

b) $4500 = 30000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 15\,\%$;

c) kai $t = 8$ m., tai $S_8 = 30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot 8\right) = 66000$ (Lt);
kai $t = 10$ m., tai $S_{10} = 30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot 10\right) = 75000$ (Lt);
arba: $S_8 = S + P_8 = 30000 + P_1 \cdot 8 = 30000 + 4500 \cdot 8 = 66000$ (Lt);
$S_{10} = S + P_{10} = 30000 + P_1 \cdot 10 = 30000 + 4500 \cdot 10 = 75000$ (Lt);

d) $57000 = 30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot t\right)$; $t = 6$ m.;
$70500 = 30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot t\right)$; $t = 9$ m.;

e)



f) $30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot t\right) \leqslant 60000$; $t \leqslant 6\frac{2}{3}$ m., t. y. 6 metai 8 mėnesiai;
$30000\left(1 + \frac{15}{100} \cdot t\right) \leqslant 90000$; $t \leqslant 13\frac{1}{3}$ m., t. y. 13 metų 4 mėnesiai.

457. I. a) Palūkanos po metų — 50 Lt, po 2 metų — 100 Lt, po 3 metų — 150 Lt, po 4 metų — 200 Lt, po 5 metų — 250 Lt, ..., po 10 metų — $50 \cdot 10 = 500$ (Lt);

b) $50 = S \cdot \frac{12,5}{100} \cdot 1$; $S = 400$ Lt.

c) Grąžintina suma po:
1 metų bus $400 + 50 = 450$ (Lt);
2 metų bus $400 + 50 \cdot 2 = 500$ (Lt) (arba $450 + 50 = 500$ (Lt));
3 metų bus $400 + 50 \cdot 3 = 550$ (Lt) (arba $500 + 50 = 550$ (Lt));
4 metų bus $400 + 50 \cdot 4 = 600$ (Lt) (arba $550 + 50 = 600$ (Lt));
5 metų bus $400 + 50 \cdot 5 = 650$ (Lt) (arba $600 + 50 = 650$ (Lt));
10 metų bus $400 + 50 \cdot 10 = 900$ (Lt);

d) $300 = 400 \cdot \frac{12,5}{100} \cdot t$; $t = 6$ m.; $400 = 400 \cdot \frac{12,5}{100} \cdot t$; $t = 8$ m.;
$600 = 400 \cdot \frac{12,5}{100} \cdot t$; $t = 12$ m.; $750 = 400 \cdot \frac{12,5}{100} \cdot t$; $t = 15$ m.;

e) $400\left(1 + \frac{12,5}{100} \cdot t\right) = 800$; $t = 8$ m.; $400\left(1 + \frac{12,5}{100} \cdot t\right) = 1200$; $t = 16$ m.;
$400\left(1 + \frac{12,5}{100} \cdot t\right) = 1600$; $t = 24$ m.

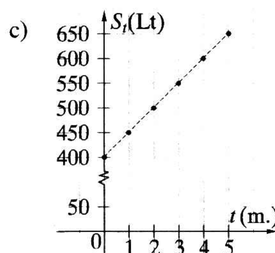
II. a) $P(t) = 400 \cdot \frac{12,5}{100} \cdot t = 50t$; b) $P(1,5) = 75$ Lt; $P(1,75) = 87,5$ Lt; $P(2,25) = 112,5$ Lt; $P(2,5) = 125$ Lt.

III.

a) $S(t) = S + P(t) = 400 + 50t$;

b) $S\left(2\frac{1}{4}\right) = 512,5$ Lt;
$S\left(2\frac{1}{2}\right) = 525$ Lt;
$S\left(2\frac{3}{4}\right) = 537,5$ Lt;
$S\left(3\frac{1}{4}\right) = 562,5$ Lt;

c)



458. Palūkanos už vienerius metus yra 2400 Lt.

a) $2400 = 20\,000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 12\%$; $S_5 = 20\,000 + 2400 \cdot 5 = 32\,000$ (Lt);

b) $2400 = 18\,000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 13\frac{1}{3}\%$; $S_5 = 18\,000 + 2400 \cdot 5 = 30\,000$ (Lt);

c) $2400 = 24\,000 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 10\%$; $S_5 = 24\,000 + 2400 \cdot 5 = 36\,000$ (Lt);

d) $2400 = 19\,200 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 12,5\%$; $S_5 = 19\,200 + 2400 \cdot 5 = 31\,200$ (Lt).

459.

	Paskola (Lt)	Palūkanų norma (%)	Paprastosios palūkanos (Lt) po			Grąžintina suma (Lt) po		
			1 metų	2 metų	3 metų	1 metų	2 metų	3 metų
a)	8500	10	850	1700	2550	9350	10 200	11 050
b)	7500	9	675	1350	2025	8175	8850	9525
c)	8000	9,5	760	1520	2280	8760	9520	10 280
d)	7000	8,5	595	1190	1785	7595	8190	8785
e)	7500	8	600	1200	1800	8100	8700	9300
f)	9000	9,5	855	1710	2565	9855	10 710	11 565

460. a) $240 = 6000 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{8}{12}$; $p = 6\,\%$; b) $105 = 6000 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{84}{360}$; $p = 7,5\,\%$.

461. a) $\frac{7200}{6} = 1200$ (Lt); b) $7200 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{12} = 48$ (Lt);

c)

Mėnesiai	Palūkanos (Lt)	Grąžinama suma (Lt)	Paskolos likutis (Lt)
1	48	1200	6000
2	48	1200	4800
3	48	1200	3600
4	48	1200	2400
5	48	1200	1200
6	48	1200	—
Iš viso:	288	7200	

462. Per mėnesį grąžinimo suma yra $12\,600 : 8 = 1575$ (Lt).
Palūkanos už ketvirtį yra $12\,600 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{4} = 283,5$ (Lt).

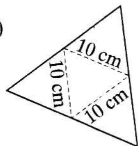
Ketvirčiai	Palūkanos (Lt)	Grąžinama suma (Lt)	Paskolos likutis (Lt)
1	283,5	1575	11 025
2	283,5	1575	9450
3	283,5	1575	7875
4	283,5	1575	6300
5	283,5	1575	4725
6	283,5	1575	3150
7	283,5	1575	1575
8	283,5	1575	—
Iš viso:	2268	12 600	

463. a) *I būdas.* Atlyginimas kas mėnesį didėjo po $750 \cdot \frac{3,5}{100} = 26,25$ (Lt).
Vasario mėnesį jis buvo $750 + 26,25 = 776,25$ (Lt),
kovo mėnesį — $776,25 + 26,25 = 802,5$ (Lt),
balandžio mėnesį — $802,5 + 26,25 = 828,75$ (Lt),
gegužės mėnesį — $828,75 + 26,25 = 855$ (Lt),
birželio mėnesį — $855 + 26,25 = 881,25$ (Lt),
liepos mėnesį — $881,25 + 26,25 = 907,5$ (Lt),
rugpjūčio mėnesį — $907,5 + 26,25 = 933,75$ (Lt),
rugsėjo mėnesį — $933,75 + 26,25 = 960$ (Lt),
spalio mėnesį — $960 + 26,25 = 986,25$ (Lt),

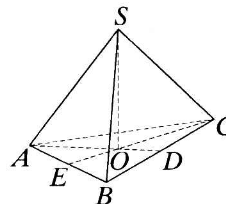
lapkričio mėnesį — $986{,}25 + 26{,}25 = 1012{,}5$ (Lt),
gruodžio mėnesį — $1012{,}5 + 26{,}25 = 1038{,}75$ (Lt).
Per metus darbininkas uždirbo:
$750 + 776{,}25 + 802{,}5 + 828{,}75 + 855 + 881{,}25 + 907{,}5 + 933{,}75 + 960 + 986{,}25 + 1012{,}5 + 1038{,}75 =$
$= 10\,732{,}5$ (Lt).
II būdas. Taikome aritmetinės progresijos sumos formulę.
Sausio mėnesio atlyginimas buvo $a_1 = 750$ Lt.
Darbininko atlyginimas kas mėnesį padidėjo $750 \cdot \frac{3{,}5}{100} = 26{,}25$ (Lt), todėl gruodžio mėnesį jis buvo $a_{12} = 750 + 26{,}25 \cdot 11 = 1038{,}75$ (Lt).
Per metus darbininkas uždirbo $\frac{750+1038{,}75}{2} \cdot 12 = 10\,732{,}5$ (Lt).
b) $a_1 = 750$; $d = 18{,}75$; $a_{12} = 956{,}25$; $S_{12} = 10237{,}5$.
Atsakymas. a) 10732,5 Lt; b) 10237,5 Lt.

464. a) *I būdas.* Šeimai kas mėnesį pavyko sutaupyti po $200 \cdot \frac{3}{100} = 6$ (kWh) elektros energijos, todėl:
vasario mėnesį ji suvartojo $200 - 6 = 194$ (kWh),
kovo mėnesį — $194 - 6 = 188$ (kWh),
balandžio mėnesį — $188 - 6 = 182$ (kWh),
gegužės mėnesį — $182 - 6 = 176$ (kWh),
birželio mėnesį — $176 - 6 = 170$ (kWh) elektros energijos.
Per pusę metų šeima suvartojo $200 + 194 + 188 + 182 + 176 + 170 = 1110$ (kWh) elektros energijos.
II būdas. Sausio mėnesį šeima suvartojo $a_1 = 200$ kWh elektros energijos.
Kas mėnesį ji sutaupė po $200 \cdot \frac{3}{100} = 6$ (kWh) elektros energijos, todėl birželio mėnesį suvartojo $a_6 = 200 - 6 \cdot 5 = 170$ (kWh). Per pusę metų šeima suvartojo $\frac{200+170}{2} \cdot 6 = 1110$ (kWh) elektros energijos.
Atsakymas. a) 1110 kWh; b) 1080 kWh.

465. a) 24; b) 48; c) 2304π ploto vienetų; d) $18\,432\pi$ tūrio vienetų.

466. a) 

b) $S_{šon} = 3S_{\triangle SBC} = 3 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}$ (cm^2);
c) $AD = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ (cm); $AO = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm;
$H = SO = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$ (cm);
$V = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{250}{3}\sqrt{2} = 83\frac{1}{3}\sqrt{2}$ (cm^3).



467. Visų galimų elementariųjų įvykių skaičius $n = 200$, palankių įvykiui elementariųjų įvykių skaičius $m = 8$ (25; 50; 75; 100; 125; 150; 175; 200 puslapiai). **P**(atversto puslapio numeris yra skaičiaus 25 kartotinis) $= \frac{8}{200} = \frac{1}{25}$.

468. a) $\frac{\left(x+\frac{x}{y}\right)\cdot y}{\left(y-\frac{1}{y}\right)\cdot y} = \frac{xy+x}{y^2-1} = \frac{x(y+1)}{(y+1)(y-1)} = \frac{x}{y-1}$; b) $\frac{\left(2x-\frac{x}{y}\right)\cdot y}{\left(\frac{2x}{y}-4\right)\cdot y} = \frac{2xy-x}{2x-4y}$.

469. Tiesės AC ir DE lygiagrečios, nes $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$.

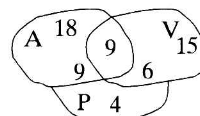
470. $\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x + y = -2. \end{cases}$

471. $\begin{cases} -3 = a \cdot 4 + b \cdot 2 - 3, \\ 5 = a \cdot 16 + b \cdot 4 - 3; \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -2.$ $\quad y = x^2 - 2x - 3$; $y = (x-1)^2 - 4$.

472. 24 nuliais (11 nulių iš pačių dauginamųjų, 10 nulių iš lyginio skaičiaus ir skaičiaus, kurio paskutinis skaitmuo 5, sandaugų, o dar 3 nuliai iš skaičių 25, 50, 75 ir lyginių skaičių sandaugų).
Griežčiau samprotaujama taip. Skaidinyje pirminiai skaičiai yra 50 skaičių, kurie dalijasi iš 2. Bet iš jų kas antras dalijasi iš 4 (taigi turime $50 + 25$ dvejetus). Iš jų kas antras dalijasi iš 8 (dar 12 dvejetų), iš šių kas antras dalijasi iš 16 (dar 6 dvejetai), iš šių kas antras dalijasi iš 32 (dar 3 dvejetai), o iš šių vienas dalijasi iš 64 (dar 1 dvejetas). Taigi skaidinyje yra $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ dvejetai. Panašiai skaidinyje yra 20 skaičių, kurie dalijasi iš 5, iš jų kas penktas dalijasi iš 25. Taigi skaidinyje yra 24 penketai. Kadangi dvejetų yra daugiau, tai nulių yra tiek, kiek ir penketų.

473. $\sqrt{2}$; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $1\frac{4}{5}$.

474. $18 + 15 - (28 - 4) = 9$ — mokosi anglų ir vokiečių kalbų.
$18 - 9 = 9$ — mokosi vien anglų kalbos.
$15 - 9 = 6$ — mokosi vien vokiečių kalbos.
Galima spręsti ir sudarius lygtį. Sakykime, kad abiejų kalbų mokosi x mokinių. Tuomet tik anglų kalbos mokosi $(18 - x)$ mokinių, o tik vokiečių — $(15 - x)$ mokinių. Kadangi visi vaikai mokosi kalbų, tai
$\underbrace{18 - x}_{\text{tik anglų}} + \underbrace{15 - x}_{\text{tik vokiečių}} + \underbrace{4}_{\text{tik prancūzų}} + \underbrace{x}_{\text{anglų ir vokiečių}} = 28, \quad x = 9.$
Atsakymas. 9 mokiniai.



Patarimų, kaip spręsti šį uždavinį, galima rasti vadovėlio „Matematika 9, II dalis“, p. 192–193.

10.2. Vertybiniai popieriai

Šis skyrelis skirtas gabesniems moksleiviams. Aišku, kiekvienas moksleivis gali pasiskaityti apie obligacijas, akcijas, vekselius, bet norint spręsti uždavinius su šiais vertybiniais popieriais reikia gilesnio supratimo.

Vertybiniai popieriai — tai plačiai naudojamos pinigų skolinimo(si) fakto patvirtinimo formos.

Vieni populiariausių vertybinių popierių — *obligacijos*. *Obligacija* — tai paskolos susitarimas, reiškiantis, kad skolininkas (valstybė, bankas) sutinka nustatytu laiku ateityje sumokėti obligacijos turėtojui (pirkėjui) tam tikrą pinigų sumą, t. y. *nominaliąją obligacijos vertę*. Ją sudaro pasiskolinti pinigai ir nustatytų procentų palūkanos už paskolos laikotarpį (šis gali būti skaičiuojamas net ir dienomis). Obligacijos išperkamos tik suėjus nustatytam terminui, jų negalima realizuoti bet kuriuo momentu. Tuo jos yra nepatogios.

Plačiai paplitusi vertybinių popierių rūšis — *akcijos*. Reikia atkreipti dėmesį (o gal ir perspėti moksleivius), kad šiame skyrelyje nagrinėjamos tik *akcinių bendrovių* (AB) *akcijos*. *Uždarųjų akcinių bendrovių* (UAB), kurių šalyje yra absoliuti dauguma, akcijos nėra viešai pardavinėjamos. Jos greičiau yra pažymėjimai, kad akcininkui priklauso dalis bendrovės pelno (jeigu jis bus metų gale). Todėl, kai sakome „akcija“, toliau turime galvoje tik AB akcijas.

Akcija — į bendrovės kapitalą investuotų pinigų patvirtinimo dokumentas. *Akcijos nominalioji vertė* rodo investuotą (paskolintą) pinigų sumą. Akcininkas priklausomai nuo bendrovės finansinės padėties gali pretenduoti per tam tikrą laikotarpį į *dividendus* (grynojo pelno dalį). Kita vertus, priklausomai nuo finansinės situacijos *akcijos kaina* vertybinių popierių biržoje svyruoja — tai kyla, tai krenta. Kadangi akcijos bet kuriuo momentu *likvidžios* (t. y. parduodamos ir perkamos), tai sugebėjus jas laiku parduoti galima gerokai uždirbti.

Kol kas mažai paplitusi atsiskaitymo ne pinigais forma yra *vekseliai*. *Vekselis* — dokumentas, kuriuo jį išrašantis asmuo besąlygiškai įsipareigoja (pasižada) tiesiogiai ar netiesiogiai sumokėti tam tikrą kredito (paskolos) sumą vekselyje nurodytam asmeniui pats arba paveda tai padaryti kitam sutartu laiku. Vekseliai patogūs tuo, kad jie bet kuriuo momentu *likvidūs*; juos galima perleisti asmenims, firmoms, bankams (suprantama, už mažesnę nei vekselyje nurodytą sumą, t. y. vekselį *diskontuojant* — parduodant su nuolaida).

Baigdami nagrinėti šį skyrelį mokiniai turėtų įsitikinti, jog turint laisvų pinigų:

1) pinigus laikyti bankuose kaip neterminuotus ar terminuotus indėlius naudingiau negu „kojinėje“ (metiniai procentai svyruoja nuo 2 iki 7);

2) dar naudingiau pirkti obligacijas ar taupymo lakštus (metiniai procentai maždaug nuo 6 iki 10);

3) nebijantiems rizikuoti naudingiausia investuoti į akcijas, bet tuo atveju galima ir daug prarasti.

Vekseliai arba *čekiai* patogūs atsiskaitymams ne grynaisiais pinigais. Juos paprasčiau saugoti, jie ne taip greitai susidėvi.

Pakartoti:

procentų įvairių uždavinių sprendimą;
skaičių apvalinimą iki nurodyto skyriaus vienetų.

Išmokti:

apskaičiuoti obligacijos pardavimo kainą, žinant jos nominaliąją vertę, metinius paprastuosius procentus ir išpirkimo terminą;
apskaičiuoti už obligaciją priskaičiuojamus metinius paprastuosius procentus, žinant obligacijos nominaliąją vertę, pardavimo kainą, obligacijos išpirkimo terminą;
apskaičiuoti obligacijos išpirkimo terminą, žinant obligacijos nominaliąją vertę, pardavimo kainą ir skaičiuojamus metinius paprastuosius procentus;
apskaičiuoti palūkanas už obligaciją;
nustatyti akcijos kursą (procentais) jos nominaliosios vertės atžvilgiu;
apskaičiuoti pelną ar nuostolį parduodant įsigytas akcijas;
apskaičiuoti vekselio diskontą;
rasti vekselio kainą jį diskontuojant.

Šiame skyrelyje:

1. Mokoma papildomos įdomios medžiagos, plėtojančios paskolų nagrinėjimą.
2. Supažindinama su vertybiniais popieriais: *obligacijomis*, *akcijomis*, *vekseliais*.
3. Išsiaiškinama, kad *obligacijos pardavimo (pirkimo) kaina = pasiskolinta (paskolos) suma*; *obligacijos nominalioji vertė = paskolos grąžintina suma*; *obligacijos išpirkimo terminas = paskolos grąžinimo laikas*.
4. Mokoma apskaičiuoti obligacijos pardavimo kainą žinant obligacijos nominaliąją vertę, metinius procentus, laiką, likusį iki obligacijos išpirkimo termino, pagal bendrąją procentų skaičiavimo schemą, pažįstamą nuo septintosios klasės. Šiuo atveju obligacijos nominalioji vertė atitinka 100 procentų + metiniai procentai (ar jų dalis — priklausomai nuo laiko), o obligacijos pirkimo kaina — visada 100 procentų.
5. Po to užrašoma bendra formulė $N = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$.
6. Reikia atkreipti dėmesį, kad, skirtingai nuo paskolų ar kreditų palūkanų skaičiavimo atvejo pirmajame skyrelyje, metai laikomi turinčiais 365 (o ne 360) dienas.
7. Tikrindami, ar teisingai skelbime nurodyta obligacijos kaina, mokiniai galėtų skaičiuoti taip:

$P_{\frac{1}{4}} = 194{,}17 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{4} \approx 5{,}83\,(\text{Lt})$,

$194{,}17 + 5{,}83 = 200\,(\text{Lt})$;

$P_{\frac{1}{12}} = 198{,}20 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{12} \approx 1{,}98\,(\text{Lt})$,

$198{,}20 + 1{,}98 = 200{,}18 \neq 200\,(\text{Lt})$.

Gruodžio 1 d. nurodyta kaina yra klaidinga. Turėtų būti 198,02 (Lt), nes:

$$\begin{matrix} S\ \text{Lt} - 100\%, \\ 200\ \text{Lt} - 101\%; \end{matrix} \Rightarrow S = \frac{200 \cdot 100}{101} \approx 198{,}02\ (\text{Lt}).$$

8. Aiškinama, kas pelningiau turint laisvų pinigų: pirkti obligacijas ar padėti tuos pinigus į banką (2 pavyzdys). Tyrimo esmė — palūkanų normų *palyginimas*.
9. Susipažįstama su akcinių bendrovių *akcijomis*. Skyrelyje nagrinėjamos tik problemos, susijusios su *akcijų kursu*, palyginus procentais su *nominaliąja verte*. Pavyzdžiui, atsakant į 3 pavyzdžio klausimą reikėtų samprotauti taip:
   - akcijas naudingiausia buvo pirkti sausio pradžioje; naudinga kovo arba balandžio viduryje, gruodžio pradžioje;
   - apytiksliai buvo galima uždirbti apie $(20{,}7 - 19{,}9) \cdot 100 \approx 80\,(\text{Lt})$.
10. Trumpai užsimenama apie dar vienus vertybinius popierius, populiarius ikikarinėje Lietuvoje — *vekselius*. Vekselis — rašytinis pasižadėjimas ar nurodymas sumokėti vekselio turėtojui tam tikrą pinigų sumą iki nurodytos datos. Pateikiama pora iš Lietuvos Nacionalinio muziejaus fondų paimtų vekselių pavyzdžių. Vekseliai ir obligacijos panašūs tuo, kad tai yra *vertybiniai popieriai*, liudijantys *paskolą*; jie skiriasi tuo, kad vekselis yra likvidus bet kuriuo laiku, o obligacija — atėjus jos išpirkimo terminui.
11. Antrojo uždavinio sprendimu aiškinamas vekselio *diskonto* sumos skaičiavimas, kai žinoma *vekselio vertė* ir *diskonto norma*. Parodoma, kaip nustatoma diskontuoto *vekselio kaina*.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai uždaviniai 475–485. Kiti uždaviniai skirti kartojimui.

35–68 , iš jų 59–61 skirti akcijoms ir dividendams skaičiuoti.

475. a) 288,46 Lt;
b) $N = S_{0,5} = 288{,}46\left(1 + \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) \approx 299{,}99 \approx 300\,(\text{Lt})$;
c) $300 - 288{,}46 = 11{,}54\,(\text{Lt})$.

476. Obligacijos nominaliąją vertę rasime iš formulės $N = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$.
Kai $t = 1$ m., $p = 10\%$, turime $N = S\left(1 + \frac{10}{100} \cdot 1\right) = 1{,}1S$. Taigi:
a) $50 \cdot 1{,}1 = 55\,(\text{Lt})$; b) $68{,}18 \cdot 1{,}1 = 74{,}998 \approx 75\,(\text{Lt})$;
c) ≈ 150 Lt; d) ≈ 10 Lt; e) ≈ 30 Lt.

477. a) $50 = 47{,}85\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0{,}5\right)$; $p \approx 8{,}986\%$;
b) $50 = 42{,}92\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 1{,}5\right)$; $p \approx 10{,}997\%$;
c) $50 = 48{,}31\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{3}\right)$; $p \approx 10{,}495\%$;
d) $50 = 46{,}99\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{2}{3}\right)$; $p \approx 9{,}608\%$;
e) $50 = 46{,}67\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{3}{4}\right)$; $p \approx 9{,}514\%$.

Dar kartą priminkite moksleiviams, kad jeigu nėra nurodytas apskaičiavimo tikslumas, palūkanų norma paprastai užrašoma trimis dešimtainiais ženklais po kablelio.

478. Šis pratimas analogiškas 477 pratimui, tik čia laiko tarpas duotas dienomis, todėl vietoj t reikės įrašyti $\frac{d}{365}$.
$30 = 29{,}4\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{73}{365}\right)$; $p \approx 10{,}204\%$.

Čia metai laikomi lygūs 365 dienoms.

479. Vėl taikome formulę $N = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{365}\right)$, tik dabar reikia apskaičiuoti, kiek pirkėjui kainavo obligacijos, t. y. dydį S.
a) $2590 = S\left(1 + \frac{6}{100} \cdot \frac{209}{365}\right)$; $S \approx 2503{,}97$ Lt; b) $S \approx 2527{,}67$ Lt.

480. a) Vyriausybė pasiskolino:
$40\,000\,000 = S\left(1 + \frac{10}{100} \cdot \frac{300}{365}\right)$; $S = 36\,962\,025$ Lt.
Išperkant obligacijas bus išmokėta:
$40\,000\,000 - 36\,962\,025 = 3\,037\,975$ (Lt) palūkanų.
b) 2 277 280 Lt palūkanų.

Pastaba. Skaičiavimo rezultatas priklauso nuo skaičiuoklio tipo. Skaičiuojant paprastesnės konstrukcijos skaičiuokliu atsakymas gali būti: a) 3 037 971 Lt; b) 2 277 276 Lt.

481. Reikia palyginti obligacijų palūkanų normą su banko metinių palūkanų norma.
a) Obligacijų palūkanų norma: $500 = 475\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{292}{365}\right)$; $p \approx 6{,}579\%$.
Kadangi $6{,}579\% > 6{,}5\%$, tai naudingiau pirkti obligacijas.
b) Obligacijų palūkanų norma: $200 = 190\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{219}{365}\right)$; $p \approx 8{,}772\%$.
Kadangi $8{,}772\% < 9\%$, tai naudingiau paskolinti žmogui.

482. Akcijos kainą šiandien nesunkiai apskaičiuojame iš atitinkamos proporcijos.
a) $250 \cdot \frac{100-16}{100} = 210\,(\text{Lt})$; b) 220 Lt;
c) 227,5 Lt; d) $(250 - 2{,}5n)$ Lt.

$$\begin{matrix} 250\ \text{Lt} - 100\%, \\ x\ \text{Lt} - (100 - 16)\%. \end{matrix}$$

483. Kaip ir 482 pratime, pravartu susidaryti proporciją. Akcijos kursas biržoje, palyginus su nominaliąja verte:

a) mažesnis $\frac{(200-190)\cdot 100}{200} = 5\,(\%)$; b) mažesnis $\frac{(200-195)\cdot 100}{200} = 2{,}5\,(\%)$;
c) didesnis $\frac{(206-200)\cdot 100}{200} = 3\,(\%)$; d) didesnis $\frac{(215-200)\cdot 100}{200} = 7{,}5\,(\%)$.

$200\,\text{Lt} - 100\%$,
$(200-190)\,\text{Lt} - x\%$.

484. Diskonto sumą rasime pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$. Iš vekselio vertės atėmę diskonto sumą sužinosime vekselio kainą. Beje, analogiškas uždavinys yra išspręstas ir teorinėje dalyje (2, p. 159).

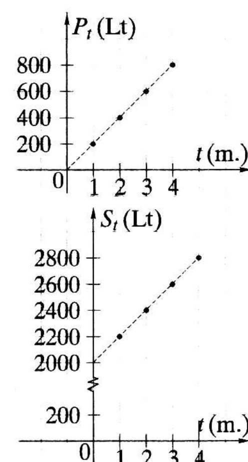
Čia metai jau laikomi lygiais 360 dienų.

Diskonto suma yra:
a) $6000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{15}{360} = 20\,(\text{Lt})$; b) 32 Lt; c) 68 Lt; d) $\frac{4n}{3}$ Lt.
Vekselio kaina yra:
a) $6000 - 20 = 5980\,(\text{Lt})$; b) 5968 Lt; c) 5932 Lt; d) $\left(6000 - \frac{4}{3}n\right)$ Lt.
Nurodymas. Galima iškart suprastinti formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$.
Kai $S = 6000\,\text{Lt}$, $p = 8\%$, tai $P_d = 6000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{d}{360} = \frac{4d}{3}$.

485. Dienų skaičių rasime pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$. Stipresnieji mokiniai gali spręsti taip: kai $S = 1825$, $p = 10\%$, tai $P_d = 1825 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{d}{360}$ ir $d = \frac{144P_d}{73}$. Taigi:
a) $d = 19{,}726027... \approx 20$ (dienų); b) $d = 29{,}589041... \approx 30$ (dienų);
c) $d = 49{,}315068... \approx 50$ (dienų); d) $d = 1\frac{71}{73}n$ (dienų).

486. a) $P_1 = 2000 \cdot \frac{10}{100} \cdot 1 = 200\,\text{Lt}$; $P_2 = 400\,\text{Lt}$; $P_3 = 600\,\text{Lt}$; $P_4 = 800\,\text{Lt}$;
b) $S_1 = 2200\,\text{Lt}$; $S_2 = 2400\,\text{Lt}$; $S_3 = 2600\,\text{Lt}$; $S_4 = 2800\,\text{Lt}$;
c) $P_t = 200t$, $0 \leqslant t \leqslant 4$; $P_{0,5} = 100\,\text{Lt}$; $P_{2,25} = 450\,\text{Lt}$;
d) $S_t = 2000 + 200t$, $0 \leqslant t \leqslant 4$;
$S_{1,5} = 2300\,\text{Lt}$; $S_{2,75} = 2550\,\text{Lt}$;
e) 200; 400; 600; 800;
f) 2200; 2400; 2600; 2800;
g) $P_{1\,\text{mėn.}} = 2000 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{12} = 16\frac{2}{3}\,(\text{Lt})$; $P_m = 16\frac{2}{3}m$, $0 \leqslant m \leqslant 48$;
$P_{8\,\text{mėn.}} = 16\frac{2}{3} \cdot 8 = 133\frac{1}{3}\,(\text{Lt})$; $P_{15\,\text{mėn.}} = 16\frac{2}{3} \cdot 15 = 250\,(\text{Lt})$;
h) $S_m = 2000 + 16\frac{2}{3}m$, $0 \leqslant m \leqslant 48$;
$S_{9\,\text{mėn.}} = 2000 + 16\frac{2}{3} \cdot 9 = 2150\,(\text{Lt})$;
$S_{17\,\text{mėn.}} = 2000 + 16\frac{2}{3} \cdot 17 = 2283\frac{1}{3}\,(\text{Lt})$;
i) $P_{1\,\text{d.}} = 2000 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{360} = \frac{5}{9}\,(\text{Lt})$; $P(d) = \frac{5}{9}d$, $0 \leqslant d \leqslant 1440$;
$P(180) = \frac{5}{9} \cdot 180 = 100\,(\text{Lt})$; $P(250) = \frac{5}{9} \cdot 250 \approx 138{,}89\,(\text{Lt})$;
j) $S(d) = 2000 + \frac{5}{9}d$, $0 \leqslant d \leqslant 1440$;
$S(200) = 2000 + \frac{5}{9} \cdot 200 \approx 2111{,}11\,(\text{Lt})$;
$S(350) = 2000 + \frac{5}{9} \cdot 350 \approx 2194{,}44\,(\text{Lt})$;
k) $P_{782\,\text{d.}} = \frac{5}{9} \cdot 782 \approx 434{,}44\,\text{Lt}$; $S_{782\,\text{d.}} \approx 2434{,}44\,(\text{Lt})$;
$P_{1173\,\text{d.}} = \frac{5}{9} \cdot 1173 \approx 651{,}67\,(\text{Lt})$; $S_{1173\,\text{d.}} \approx 2651{,}67\,\text{Lt}$.

P_t ir S_t grafikai atrodo šitaip:



4 metai turi $360 \cdot 4 = 1440$ dienų.
2 m. 2 mėn. 2 d. = 782 d.
3 m. 3 mėn. 3 d. = 1173 d.

487. a)

Ketvirčiai	Palūkanos (Lt)	Paskolos grąžinimo suma (Lt)	Paskolos likutis (Lt)
1	45	500	2500
2	45	500	2000
3	45	500	1500
4	45	500	1000
5	45	500	500
6	45	500	—
Iš viso:	270	3000	

b)

Pusmečiai	Palūkanos (Lt)	Paskolos grąžinimo suma (Lt)	Paskolos likutis (Lt)
1	90	1000	2000
2	90	1000	1000
3	90	1000	—
Iš viso:	270	3000	

488. a) 4; 5; 6; 7; 8; ...
$d = a_n - a_{n-1} = (n+3) - (n-1+3) = 1$. Duotoji seka yra aritmetinė progresija, kurios $a_1 = 4$, $d = 1$.
b) $a^2 - 1$; $a^2 - 1$; $a^2 - 1$; ...
$d = a_n - a_{n-1} = a^2 - 1 - (a^2 - 1) = 0$.
Gavome seką, kurios $a_1 = a^2 - 1$, $d = 0$. Tokia seka taip pat yra aritmetinė progresija, tačiau per daug žavėtis tokiomis sekomis 9 klasėje nevertėtų, juo labiau neverta skirti laiko joms nagrinėti.

Palyginimui su mokiniais galima panagrinėti, ar seka $a_n = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, yra aritmetinė progresija.

489. a) $A_1A_2 = a_1 = 3\,\text{cm}$, $d = 2\,\text{cm}$;
$A_9A_{10} = a_9 = 3 + (9-1)\cdot 2 = 19\,(\text{cm})$,
$A_1A_{10} = S_9 = \frac{3+19}{2}\cdot 9 = 99\,(\text{cm})$;
b) $A_1A_2 = a_1 = 3\,\text{cm}$, $d = 2\,\text{cm}$;
$A_{19}A_{20} = a_{19} = 3 + (19-1)\cdot 2 = 39\,(\text{cm})$,
$A_1A_{20} = S_{19} = \frac{3+39}{2}\cdot 19 = 399\,(\text{cm})$;
c) $A_{10}A_{15} = A_1A_{15} - A_1A_{10} = 224 - 99 = 125\,(\text{cm})$, nes
$A_{14}A_{15} = a_{14} = 3 + (14-1)\cdot 2 = 29\,(\text{cm})$, o
$A_1A_{15} = S_{14} = \frac{3+29}{2}\cdot 14 = 224\,(\text{cm})$;
d) $A_{15}A_{20} = A_1A_{20} - A_1A_{15} = 399 - 224 = 175\,(\text{cm})$.

490. 10% pirmosios dienos kelio sudaro $\frac{20\cdot 10}{100} = 2\,(\text{km})$.
a) $a_1 = 20$, $d = 2$, $a_5 = 20 + 4\cdot 2 = 28$, $S_5 = \frac{20+28}{2}\cdot 5 = 120\,(\text{km})$;
b) $a_1 = 20$, $d = 2$, $a_7 = 20 + 6\cdot 2 = 32$, $S_7 = \frac{20+32}{2}\cdot 7 = 182\,(\text{km})$.

Galima pasiūlyti mokiniams spręsti ir be aritmetinės progresijos n-tojo nario ir n pirmųjų narių sumos formulių.

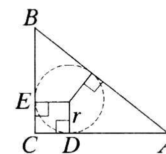
491. $S_{\text{šon}} = 2\pi\cdot 24\cdot 20 = 960\pi$ (ploto vienetų);
$S_{\text{pav}} = 2\pi\cdot 24\cdot 20 + 2\pi\cdot 24^2 = 2112\pi$ (ploto vienetų);
$V = \pi\cdot 24^2\cdot 20 = 11\,520\pi$ (tūrio vienetų).

492. Apskaičiuokime abiejų įvykių tikimybes. Įvykiui A yra palankūs du elementarieji įvykiai, o įvykiui B — tik vienas elementarusis įvykis iš visų 36 galimų elementariųjų įvykių. Todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, o $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{36}$. Kadangi $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$, tai tikėtinesnis įvykis A.

493. Sakykime, kad automobilis važiavo x km/h greičiu. Tuomet kelionėje jis užtruko $\frac{140}{x}$ h. Jeigu automobilio greitis būtų buvęs $(x + 10)$ km/h, tai jis kelionėje būtų užtrukęs $\frac{140}{x+10}$ h.
Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\frac{140}{x} - \frac{140}{x+10} = \frac{1}{3}$, $x^2 + 10x - 4200 = 0$,
$x_1 = -70$ (netinka pagal prasmę), $x_2 = 60$.
Atsakymas. 60 km/h.

20 min. $= \frac{1}{3}$ h.

494. a) 3,2 cm, 6 cm. *Nurodymas.* Sudarome lygtį: $(8x)^2 + (15x)^2 = 6{,}8^2$;
b) $9{,}6\,\text{cm}^2$; c) 16 cm; d) $2\frac{14}{17}$ cm.
Apibrėžtinio apskritimo spindulys lygus 3,4 cm, o įbrėžtinio — 1,2 cm.
Nurodymas. Galima pasinaudoti bendrų liestinių apskritimui atkarpų lygumo savybe.



$BE + EC + CD + DA = 3{,}2 + 6$;
$BE + DA + 2r = 9{,}2$;
$BE + DA = AB$,
$6{,}8 + 2r = 9{,}2$; $r = 1{,}2$.

495. Kai $\frac{3}{n-3} = 4$, tai $n = \frac{15}{4}$, o $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{\frac{15}{4}-1} = \frac{4}{11}$.

496. a) $17 - \sqrt{2}$; b) 29; c) $21 - 12\sqrt{3}$.

497. a) $1\frac{2}{3}$; b) $-3\frac{2}{3}$; c) $\frac{10}{33}$; d) $7\frac{13}{14}$.

498. Sąlygą galime užrašyti kaip tokias atitinkamybes:
1 sąs. + 2 piešt. + 1 trint. $\leftrightarrow$ 1,6 Lt,
2 sąs. + 3 piešt. + 3 trint. $\leftrightarrow$ 3,3 Lt,
2 sąs. + 5 piešt. + 1 trint. $\leftrightarrow$? Lt.
Todėl iš viso:
5 sąs. + 10 piešt. + 5 trint. = 5 (1 sąs. + 2 piešt. + 1 trint.) $\leftrightarrow$ $5\cdot 1{,}6 = 8$ (Lt),
Jeigu panašiai „susumuosime“ pirmas dvi atitinkamybes, gausime:
3 sąs. + 5 piešt. + 4 trint. $\leftrightarrow$ 4,9 Lt, todėl Albinai reikia mokėti $8 - 4{,}9 = 3{,}1$ (Lt).

499. *I būdas.* Iš sąlygos aišku, kad per 10 s traukinys nuvažiuoja 150 m, todėl jo greitis yra $150 : 10 = 15$ (m/s), o ilgis — $15\cdot 5 = 75$ (m).
II būdas. Sakykime, kad traukinio ilgis yra x m. Tuomet jo greitis yra $\frac{x}{5}$ (m/s).
Per 15 s traukinys nuvažiuoja $\frac{x}{5}\cdot 15 = 3x$ (m). Pagal sąlygą: $3x = x + 150$,
$x = 75$ (m).

15 m/s $= 15\cdot 3600$ m/h $= 54$ km/h.

10.3. Pirkimas išsimokėtinai

Skyrelyje nagrinėjamas dar viena paskolos rūšis, vadinama *pirkimu išsimokėtinai.* Tai dažnai psichologiškai patrauklu: sumoki palyginti nedidelį pradinį įnašą ir daiktas jau tavo! Tiesa, po to tam tikrais laiko intervalais dar reikės sumokėti keletą nustatytų įnašų. Tačiau reikia gerai suprasti, kad prekės *kaina perkant išsimokėtinai* — visada didesnė už prekės *mažmeninę kainą.* Žinoma, yra ir kitas būdas nusipirkti patinkančią prekę — galima pasiskolinti pinigų už sutartas palūkanas ir sumokėti iškart. Kad suprasti, kaip pirkti yra pigiau, reikia suskaičiuoti *metinius paprastuosius procentus,* t. y. pirkimo išsimokėtinai *palūkanų normą.*

Labai svarbu pirkimo išsimokėtinai uždaviniuose išskirti algoritmo žingsnius ir apskaičiuoti:

- prekės kainą;
- palūkanas;
- „pasiskolintą" sumą, t. y. skirtumą tarp nustatytos prekės kainos ir pradinio įnašo;
- metinius paprastuosius procentus (palūkanų normą).

Svarbiausia, reikia nuolat atkreipti mokinių dėmesį, kad pirkimo išsimokėtinai uždaviniuose visuomet dalyvauja dvi prekės kainos: ta kaina, kuri matoma parduotuvėje (mažmeninė kaina), ir ta kaina, kurią galų gale teks sumokėti pridėjus visus įnašus (pirkimo išsimokėtinai kaina).

Pirkimo išsimokėtinai atveju pasiskolintą pinigų sumą, palūkanas, metinius paprastuosius procentus ir apmokėjimo laikotarpį sieja ta pati paskolos palūkanų skaičiavimo formulė $P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t$. Iš jos visuomet galima surasti bet kurį vieną dydį žinant kitus tris.

Uždavinyne yra ir *lizingo* uždavinių (79–81). *Lizingas* — viena iš pirkimo išsimokėtinai formų, kai lizingo įmonė perduoda juridiniam arba fiziniam asmeniui valdyti ir naudoti jai priklausantį turtą (automobilius, žemės ūkio techniką, orgtechniką, nekilnojamąjį turtą, įrengimus ir kt.). Po kurio laiko išsipirkęs turtą šis asmuo tampa jo savininku. Be lizingu įsigyjamos prekės pradinės įmokos, nustatytų periodinių įmokų (kas mėnesį, ketvirtį ir t. t.), dar reikia mokėti vienkartinį *administracinį* mokestį, kuris paprastai sudaro 1% įsigyjamos prekės kainos.

Pakartoti:

paskolos palūkanų, grąžintinos sumos, palūkanų normos skaičiavimus;

kintančių dydžių funkcinę priklausomybę;

su aritmetinės progresijos narių suma susijusių uždavinių sprendimą.

Išmokti:

apskaičiuoti pirkimo išsimokėtinai prekės kainą;

surasti pirkimo išsimokėtinai pasiskolintą sumą;

nustatyti pirkimo išsimokėtinai palūkanas;

apskaičiuoti pirkimo išsimokėtinai palūkanų normą;

susieti lygtimi pirkimo išsimokėtinai palūkanas, pasiskolintą sumą, palūkanų normą ir laiką ir spręsti susidarytą lygtį.

Šiame skyrelyje:

1. Aiškinamasi, kas yra *pirkimas išsimokėtinai.* Prekės kaina surandama taip:

Kaina perkant išsimokėtinai	=	Pradinis įnašas	+	Laikotarpio įnašas	×	Laikotarpių skaičius

2. Apskaičiuojama, kad Vaidoto televizoriaus visa kaina bus $300 + 40 \cdot 12 = 780\,(\text{Lt})$.
3. Padaroma išvada, kad *pirkimas išsimokėtinai* — savotiška *paskolos forma.*
4. Aptariama, kad *pasiskolintą* iš prekeivio sumą sudaro prekės mažmeninės kainos ir pradinio įnašo skirtumas:

Pasiskolinta suma	=	Prekės kaina	–	Pradinis įnašas

5. Išsiaiškinama, jog *palūkanas* sudaro prekės kainos perkant išsimokėtinai ir mažmeninės kainos skirtumas:

Palūkanos	=	Prekės kaina išsimokėtinai	–	Prekės mažmeninė kaina

6. Aptariama, kada naudingiau pirkti prekę išsimokėtinai, o kada — skolintis pinigų ir sumokėti iškart visą prekės mažmeninę kainą. Tai parodo *palygintos* pirkimo išsimokėtinai ir paskolos (kredito) *palūkanų normos.*
7. Pavyzdžiu mokoma(si) pirkimo išsimokėtinai uždavinių sprendimo žingsnių (keturių etapų). (Deja, trečiajame yra korektūros klaida. Turi būti „pasiskolinta", o ne „pakolinta" suma!)
8. Atsakant į antrą klausimą „Ar verta Vaidotui pirkti televizorių išsimokėtinai... ?" reikia visų pirma apskaičiuoti televizoriaus pirkimo išsimokėtinai palūkanų normą pagal algoritmą:
   - televizoriaus kaina perkant išsimokėtinai yra $300 + 40 \cdot 12 = 780\,(\text{Lt})$;
   - palūkanos yra $780 - 600 = 180\,(\text{Lt})$;
   - Vaidoto „pasiskolinta" suma yra $600 - 300 = 300\,(\text{Lt})$;
   - pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma yra:
   $$180 = 300 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1,\ p = 60\%.$$

   Taigi jei kaimynas Rimas gali paskolinti metams 300 Lt su 50% metinių palūkanų, pirkti išsimokėtinai *neverta,* jeigu Rimas skolina tik už 65% metines palūkanas, o kitos galimybės pasiskolinti pinigų nėra — pirkti išsimokėtinai *verta.*
9. Iš tikrųjų pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma yra beveik dvigubai didesnė už *apskaičiuotąją.* 10 klasėje įsitikinsime, kad pirkimas išsimokėtinai su nuolatiniu įmokų mokėjimu atitinka pastoviųjų palūkanų paskolą su beveik dviguba palūkanų norma.

Teminiai uždaviniai 500–505. Kiti uždaviniai (506–526) skirti kartojimui. 69–81

500. a) Kaina perkant išsimokėtinai yra $495 + 98 \cdot 12 = 1671$ (Lt);
palūkanos yra $1671 - 1230 = 441$ (Lt);
pasiskolinta suma yra $1230 - 495 = 735$ (Lt);
palūkanų norma: $441 = 735 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1$; $p = 60\%$.
b) Kaina perkant išsimokėtinai yra $350 + 40 \cdot 24 = 1310$ (Lt);
palūkanos yra $1310 - 1050 = 260$ (Lt);
pasiskolinta suma yra $1050 - 350 = 700$ (Lt);
palūkanų norma: $260 = 700 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$; $p \approx 18{,}571\%$.

501. a) $(2700 - 1200) : 30 = 50$ (Lt); b) $(2700 - 1200) : 24 = 62{,}5$ (Lt).
Pastaba. Galima sudaryti ir lygtį:
a) $1200 + 30x = 2700$; b) $1200 + 24x = 2700$; čia x — mėnesinis įnašas.

502. Šis ir 503 pratimai sprendžiami analogiškai kaip ir 500 uždavinys.
a) $1500 + 120 \cdot 30 = 5100$ (Lt); b) $5100 - 4200 = 900$ (Lt);
c) $4200 - 1500 = 2700$ (Lt); d) $900 = 2700 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2{,}5$; $p = 13\frac{1}{3}\%$.

503. a) $800 + 68{,}75 \cdot 24 = 2450$ (Lt); b) $2450 - 2000 = 450$ (Lt);
c) $2000 - 800 = 1200$ (Lt); d) $450 = 1200 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$; $p = 18{,}75\%$.

504. a) 1929,6 Lt. b) 2026,8 Lt.

505. a) Pradinis įnašas yra $2400 \cdot \frac{1}{3} = 800$ (Lt).
Sakykime, kad mėnesinis įnašas yra x Lt. Tada kaina perkant išsimokėtinai bus $(800 + 24x)$ Lt, palūkanos — $800 + 24x - 2400 = (24x - 1600)$ Lt, pasiskolinta suma — $2400 - 800 = 1600$ (Lt). Pagal sąlygą:
$24x - 1600 = 1600 \cdot \frac{10}{100} \cdot 2$; $24x - 1600 = 320$; $x = 80$ Lt.
b) Pradinis įnašas yra $2400 \cdot 0{,}2 = 480$ (Lt).
Sakykime, kad mėnesinis įnašas yra x Lt. Tada kaina perkant išsimokėtinai bus $(480 + 24x)$ Lt, palūkanos — $480 + 24x - 2400 = (24x - 1920)$ Lt, pasiskolinta suma — $2400 - 480 = 1920$ (Lt). Pagal sąlygą:
$24x - 1920 = 1920 \cdot \frac{15}{100} \cdot 2$; $24x - 1920 = 576$; $x = 104$ Lt.

2400 Lt — 100%,
x Lt — $33\frac{1}{3}\%$.

506. a) 400 Lt; 500 Lt;
b) 1650 Lt; 1750 Lt;
c) $1250 \cdot \frac{p}{100} \cdot 1 = 100$; $p = 8\%$;
d) 3 m. ir 4 mėn. yra $12 \cdot 3 + 4 = 40$ (mėn.);
$P_{40\,\text{mėn.}} = 1250 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{40}{12} \approx 333{,}33$ (Lt);
1 m. 1 mėn. ir 1 d. yra $360 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 1 = 391$ (d.);
$P_{391\,\text{d.}} = 1250 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{391}{360} \approx 108{,}61$ (Lt);
e) $1250 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ (Lt) — palūkanos už mėnesį;
$P(m) = 8\frac{1}{3}m$, $0 \leqslant m \leqslant 60$;
$P(25) = 8\frac{1}{3} \cdot 25 \approx 208{,}33$ (Lt); $P(30) = 250$ Lt;
f) $1250 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{360} = \frac{5}{18}$ (Lt) — palūkanos už dieną;
$P(d) = \frac{5}{18}d$, $S(d) = 1250 + \frac{5}{18}d$, $0 \leqslant d \leqslant 1800$;
$S(900) = 1250 + \frac{5}{18} \cdot 900 = 1500$ (Lt);
$S(1200) = 1250 + \frac{5}{18} \cdot 1200 \approx 1583{,}33$ (Lt).

Sprendžiant 507–510 pratimus, reikia prisiminti algoritmą nusakančią formulę $N = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{365}\right)$.

507. a) $N = 191{,}39\left(1 + \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) \approx 200$ (Lt); b) ≈ 150 Lt.

508. a) $50 = 48\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{175}{365}\right)$; $p \approx 8{,}69\%$; b) $p \approx 13{,}31\%$.

509. a) $50 = S\left(1 + \frac{7}{100} \cdot \frac{90}{365}\right)$; $S \approx 49{,}15$ Lt; b) $S \approx 49{,}37$ Lt.

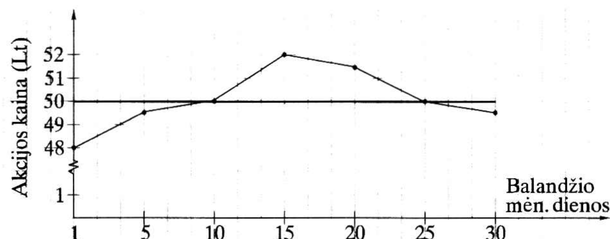
510. a) $98\left(1 + \frac{8}{100} \cdot \frac{90}{365}\right) \approx 100$ (Lt); b) ≈ 40 Lt.

Obligacijos nominaliąją vertę skaičiuojame lito tikslumu.

511. Akcijos pardavimo kaina:
a) $\frac{200 \cdot 92}{100} = 184$ (Lt), todėl patirtas 1 Lt nuostolis:
b) $\frac{200 \cdot 92{,}5}{100} = 185$ (Lt), todėl nei pelnas, nei nuostolis;
c) $\frac{200 \cdot 93}{100} = 186$ (Lt), todėl gautas 1 Lt pelnas;
d) $\frac{200 \cdot 94{,}8}{100} = 189{,}6$ (Lt), todėl gautas 4,6 Lt pelnas.

a) 200 Lt — 100%,
x Lt — $(100 - 8)\%$.

512. a)



Padėkite moksleiviams pasirinkti mastelį.

b) Akcijos kursas palyginti su nominaliąja verte mėnesio pradžioje buvo mažesnis, viduryje — didesnis, gale — vėl mažesnis.
c) Akcijos kursas kilo nuo balandžio 1 iki 15 d., krito — nuo balandžio 15 iki 30 d.
d) Akcijos kursas didesnis už nominaliąją vertę buvo nuo balandžio 10 iki 25 d., mažesnis — nuo balandžio 1 iki 10 d. ir nuo 25 iki 30 d.
e) Už nominaliąją vertę akcija buvo parduodama balandžio 10 d. ir 25 d.

513. Pradžioje reikėtų spręsti papildomai šiek tiek lengvesnius uždavinius, pvz.: c) 117 km; d) 170,4 km.

Tai sunkus uždavinys. Turėtų būti dar ir su žvaigždute.

Jeigu x — dienų skaičius, tai per pirmąją dieną nueita 15 km, o per kiekvieną kitą vis $15 \cdot \frac{12}{100} = 1{,}8$ (km) daugiau. Todėl per x dienų nukeliauta $\frac{15+15+(x-1)\cdot 1{,}8}{2} \cdot x = (15 + 0{,}9(x-1))x = (0{,}9x^2 + 14{,}1x)$ km. Taigi:
c) $0{,}9x^2 + 14{,}1x = 117$; $9x^2 + 141x - 1170 = 0$; $x_1 = -21\frac{2}{3}$ (netinka pagal prasmę); $x_2 = 6$.
Atsakymas. Per 6 dienas.
d) $0{,}9x^2 + 14{,}1x = 170{,}4$; $9x^2 + 141x - 1704 = 0$; $x_1 = -23\frac{2}{3}$ (netinka pagal prasmę); $x_2 = 8$.
Atsakymas. Per 8 dienas.
a) Per $\approx 6{,}4$ dienos; b) per $\approx 8{,}4$ dienos.

514. $a_1 = 1$, $d = 1$. Pirmųjų natūraliųjų n skaičių suma lygi

$$\frac{1 + 1 + (n-1)\cdot 1}{2} \cdot n = \frac{2 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Dabar nelygybę sprendžiame klaidų ir bandymų metodu, t. y. mėgindami n reikšmes (toks būdas visiškai griežtas, nes funkcija $f(n) = \frac{(1+n)n}{2}$ didėja):
a) $\frac{(1+n)n}{2} \leqslant 210$, $n \leqslant 20$; b) $\frac{(1+n)n}{2} \leqslant 2070$, $n \leqslant 63$.

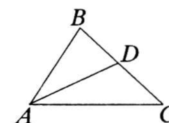
515. a) $\sqrt{21}$. *Nurodymas.* Piramidės pagrindo aukštinė lygi $6\sqrt{3}$;
b) $18\sqrt{21}$; c) $18\sqrt{3}(\sqrt{7}+2)$; d) $36\sqrt{3}$.

Reikia patikslinti sąlygą: „Pagal brėžinio duomenis raskite *taisyklingosios* piramidės..."

516. a) 125π cm^3; b) 100π cm^2.
c) Vienos dėžutės paviršiaus plotas yra $100\pi \approx 314$ cm^2. Tuomet 1000 dėžučių paviršiaus plotas bus $314\,000$ cm^2 = $= 31{,}4$ m^2. Taigi reikės: $31{,}4 + 31{,}4 \cdot \frac{15}{100} = 36{,}11 \approx 37$ (m^2) skardos.

517. Kadangi iš viso galimybių yra $50 + 20 + 20 + 10 = 100$, o ištraukti mėlyną arba baltą rutulį yra $10 + 20 = 30$ galimybių, tai tikimybė ištraukti mėlyną arba baltą rutulį lygi $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$. Kitaip sakant: $n = 100$, $m = 30$, **P**(ištrauktas rutulys bus mėlynas arba baltas) $= \frac{3}{10}$.

518. Atkarpa AD yra $\triangle ABC$ pusiaukampinė, nes $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

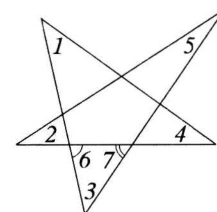


519. a) $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 4$.
Pastaba. Priminkite mokiniams, kad suradus sprendinį reikia patikrinti, ar su ta reikšme vardiklis nelygus nuliui.

520. a) $\frac{19{,}4^2+10{,}6^2}{2} + 19{,}4 \cdot 10{,}6 = \frac{1}{2}(19{,}4^2 + 2 \cdot 19{,}4 \cdot 10{,}6 + 10{,}6^2) = \frac{1}{2}(19{,}4 + 10{,}6)^2 = \frac{1}{2} \cdot 30^2 = 450$;
b) $\frac{39{,}4^2+35{,}4^2}{2} - 39{,}4 \cdot 35{,}4 = \frac{1}{2}(39{,}4^2 - 2 \cdot 39{,}4 \cdot 35{,}4 + 35{,}4^2) = \frac{1}{2}(39{,}4 - 35{,}4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$.

521. Pagal trikampio nelygybę: $\begin{cases} a+b>c, \\ b+c>a, \\ c+a>b, \end{cases}$ $\begin{cases} a>c-b, \\ a<b+c, \\ a>b-c, \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ a<16, \\ a>0. \end{cases}$
Taigi 0 cm $< a <$ 16 cm.

522. $\angle 6 = \angle 1 + \angle 4$; $\angle 7 = \angle 2 + \angle 5$ (priekampio savybė);
Kadangi $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180°$, tai $\angle 3 + \angle 1 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. Vadinasi, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.
Atsakymas. 180°.



523. a) 12 galonų atitinka JAV $\approx 45{,}43\,\ell$, o D. Britanijoje $\approx 54{,}55\,\ell$.
b) 200 litrų atitinka JAV $\approx 52{,}8$ galono, o D. Britanijoje $\approx 44{,}0$ galonus.

10.4. Pridėtosios vertės ir pelno mokesčiai

Jau 7 klasėje susidūrėme su mokesčiais. Skyriuje „Procentai. Šeimos ekonomika“ buvo aptarti išskaičiavimai iš apskaičiuoto atlyginimo, t. y. pajamų mokestis ir socialinio draudimo mokestis (SODROS mokestis) (Matematika 7, II dalis, 115 p.). Šiame skyrelyje nagrinėjamos dar dvi mokesčių rūšys. Viena jų — *pridėtosios vertės mokestis* (PVM). Tai mokestis, kuriuo apmokestinami gamybos, atliekamų darbų ir teikiamų paslaugų procese sukurta ir realizuota pridėtoji vertė (vertė, kurią gamintojas, prekybininkas, paslaugų teikėjas, sukurdamas naują gaminį ar paslaugą, prideda prie žaliavų, medžiagų, prekių ar paslaugų vertės) ir importuojamos prekės.

Paprastai *pridėtosios vertės mokestis* yra įskaičiuojamas į prekės ar paslaugos kainą. Jį sumoka pirkėjas ar paslaugos gavėjas. Pagrindinis PVM tarifas 2001 metais buvo 18%. Taigi prekės mažmeninė kaina tuo atveju atitinka 118%, PVM — 18%, o kaina be PVM — 100%. Pridėtosios vertės mokestį pasiima valstybė — jis nepatenka į pardavėjo pajamas. Todėl skaičiuojant pajamas reikia iš įplaukų ar antkainio išskaičiuoti valstybei sumokamą PVM.

Lietuvoje 2001 metais PVM tarifas buvo toks:

- 0% — iš Lietuvos eksportuojamoms prekėms ir paslaugoms;
- 6% — smulkių ūkininkų pagamintai žemės ūkio produkcijai;
- 9% — patalpų šildymui;
- 18% — visoms prekėms ir paslaugoms, išskyrus įstatymo numatytas išimtis.

Be to, už kai kurias paslaugas Lietuvoje PVM neimamas, pvz., už laikraščių, žurnalų ir knygų spausdinimą, leidybą ir platinimą; arba už švietimo, mokslo, kultūros paslaugas, teikiamas ne pelno institucijų. Šis mokestis netaikomas ir paslaugoms, teikiamoms užsienio valstybių diplomatinėms ir konsulinėms atstovybėms bei tarptautinėms organizacijoms.

Kita nagrinėjama mokesčių rūšis — *pelno mokestis*. Jo mokėtojai yra įmonės, užsiimančios komercine-ūkine veikla. Išimtis — biudžetinių įstaigų nebiudžetinės pajamos. Juo apmokestinamas ūkio subjektų pelnas, gaunamas iš jų veiklos šalyje arba šalyje ir užsienyje.

Pagrindinis pelno mokesčio tarifas 2001 metais buvo 24% pelno sumos. Šio mokesčio lengvatinis tarifas buvo 10% pelno sumos. Pelno dalis, likusi sumokėjus pelno mokestį, vadinama *grynuoju pelnu*. *Grynąjį pelną* jo turėtojas gali išleisti savo nuožiūra: skirti dividendams, investuoti į verslo plėtimą, išpirkti vertybinius popierius, padėti į banką ir pan.

Ateityje Lietuvos Respublikoje planuojama pelno mokesčio tarifą gerokai sumažinti arba išvis jo atsisakyti.

Pastaba. Juridinis asmuo — įmonė, įstaiga ar organizacija, kuri turi atskirą turtą, gali pagal įstatymą savo vardu įgyti turtinių bei asmeninių neturtinių teisių ir turėti pareigų, būti ieškovu ar atsakovu teisme, ūkiniame ar trečiųjų teisme. Juridiniu asmeniu taip pat laikomi įvairūs dariniai (asociacijos, sąjungos, moksliniai–technologiniai susivienijimai, draugijos ir pan.). *Fizinis asmuo* — individualus asmuo, veikiantis asmeniškai savo vardu; šis terminas taip pat taikomas įmonei, neturinčiai juridinio asmens teisių — tai individualioji (personalinė) įmonė ar ūkinė bendrija.

Pakartoti:

procentų uždavinių sprendimą pagal iš schemos sudarytą proporciją;
prekės didmeninės ir mažmeninės kainų sąvokas;
prekės antkainio ir procentinio antkainio sąvokas;
pajamų, įplaukų, pelno (nuostolio) skaičiavimus.

Išmokti:

apskaičiuoti prekės kainą su pridėtosios vertės mokesčiu, žinant ją be PVM;
apskaičiuoti PVM, žinant prekės mažmeninę kainą;
surasti prekės mažmeninę kainą iš sumokėto PVM;
surasti prekybos bendrąsias išlaidas, įskaitant ir PVM;
apskaičiuoti pelno mokestį, žinant pelną ir jo apmokestinimo tarifą;
apskaičiuoti pelno sumą, žinant jo mokestį ar grynąjį pelną ir pelno mokesčio tarifą.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiama prekių kainos su *pridėtosios vertės mokesčiu* samprata. Diegiama mintis, jog prekės *mažmeninė kaina* yra kaina su PVM.
2. Aiškinama, kodėl prekės mažmeninė kaina atitinka 118%. Parodoma, kad 18% iš jų atitenka valstybei, o 100% — pardavėjui.
3. Teigiama, kad pridėtosios vertės mokesčio mokėtojas yra *galutinis* prekės pirkėjas ar paslaugos gavėjas. Tokią mintį iliustruoja ir skyrelio piešinys „Nuo gamintojo ... iki pirkėjo“.
4. Atsakydami į pirmąjį klausimą mokiniai turėtų suprasti, jog Daiva prekybos centre už pakuotę skalbimo miltelių sumokėjo 0,9 Lt, o už tuziną skalbinių segtukų — $0{,}09 \cdot 12 = 1{,}08$ (Lt) pridėtosios vertės mokesčio.
5. Pavyzdžiais mokoma apskaičiuoti paslaugos kainą su PVM ir prekės PVM, kai žinoma jos mažmeninė kaina.
6. Apibendrintu pavyzdžiu mokoma apskaičiuoti prekės PVM dar vienu būdu — dauginant mažmeninę kainą iš koeficiento 0,1525423. Vadinasi, PVM sudaro $\approx$ 15,25% prekės mažmeninės kainos. Šio būdo silpnesnieji klasės mokiniai gali ir nemokėti. Pakanka sprendimo būdo, paremto schema ir proporcijos nežinomojo nario suradimu.
7. Atsakydami į antrąjį klausimą mokiniai turėtų suvokti arba mokėti apskaičiuoti, kiek prekybos centrui „Viskas namams“ *atitenka* iš „keistų“ kainų su PVM. Geriau mąstantys vaikai turėtų nesunkiai pamatyti, kad 180, 18, 1,8 ir 0,18 yra 18% nuo atitinkamai 1000, 100, 10, ir 1; o 90, 9, 0,9 ir 0,09 yra 18% nuo atitinkamai 500, 50, 5 ir 0,5. PVM

galima rasti ir standartiniu būdu dauginant prekių mažmeninę kainą iš 0,1525... Tiesa, po to gautą rezultatą dar reikės suapvalinti. Pavyzdžiui, nuo spintos kainos prekybos centrui lieka 1000 litų, nes $1180 \cdot \frac{15,25423}{100} \approx 180\,(\text{Lt})$; $1180 - 180 = 1000\,(\text{Lt})$.

Pastabos. 1) Nereikia iš mokinių reikalauti PVM apibrėžimo. Pakanka, kad jie mokėtų PVM apskaičiuoti žinodami prekės mažmeninę kainą.

2) Iš piešinėlio vadovėlio 169 puslapyje galima būtų manyti, kad PVM visą laiką auga. Iš tikrųjų jis visuomet lieka toks pat procentine išraiška (18%) ir net mažėja skaitine (urmu perkantis didmenininkas moka tūkstančius litų PVM, o mergaitė už segtukus — tik centus), tačiau ir parduodant prekes iš bazės ir iš sandėlio, ir net iš kiosko PVM yra įskaičiuojamas į prekės kainą; pardavėjai sumokėtą PVM atsiima, o pirkėjas (galutinis) atsiimti nebeturi iš ko.

8. Primenamas jau 8 klasėje nagrinėtas pelno skaičiavimas, kai žinomos pajamos ir išlaidos ar įplaukos ir bendrosios sąnaudos (išlaidos) (Matematika 8, II dalis, 140–144 p.).
9. Skaičiuojamas pelno mokestis laikant, kad jo tarifas yra 24% arba 10% (lengvatinis) pelno sumos.
10. Paaiškinama ir pavyzdžiu parodoma, kas yra grynasis pelnas ir kaip jį galima paskirstyti. Žinoma, čia yra tik vienas galimybių pavyzdys. Mokiniai galėtų pafantazuoti, kaip jie skirstytų savo gautą grynąjį pelną.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai uždaviniai yra 524–534. Pridėtosios vertės mokestis nagrinėjamas 524–530, o pelno mokestis — 531–534 uždaviniuose. Tiesa, paskutinieji du (533, 534) praplėsti prekybos organizavimo klausimais.
Likę uždaviniai (535–550) yra kartojimo. 82–101

524. a) $1042,37 \cdot 0,18 = 187,6266 \approx 187,63\,(\text{Lt})$; b) $1042,37 + 187,63 = 1230\,(\text{Lt})$.

525. a) $\frac{5400 \cdot 18}{118} \approx 823,73\,(\text{Lt})$; b) $5400 - 823,73 = 4576,27\,(\text{Lt})$.

a) 5400 Lt — 118%,
x Lt — 18%.

526. a) $\frac{12,32 \cdot 18}{118} \approx 1,88\,(\text{Lt})$; b) $\frac{45,6 \cdot 18}{118} \approx 6,96\,(\text{Lt})$; c) $\approx 9,75$ Lt;
d) $\approx 0,63$ Lt; e) $\approx 15,48$ Lt; f) $\approx 27,92$ Lt; g) $\approx 0,14$ Lt;
h) $\approx 35,83$ Lt; i) $\approx 1,62$ Lt.

527. a) $\frac{27 \cdot 118}{18} = 177\,(\text{Lt})$; b) 295 Lt; c) $\approx 7,87$ Lt; d) $\approx 3,28$ Lt;
e) $\approx 87,98$ Lt; f) $\approx 131,50$ Lt; g) 2,36 Lt; h) $\frac{59a}{9}$ Lt; i) $\frac{59(x-1)}{9}$ Lt.

a) 27 Lt — 18%,
x Lt — 118%.

528. a) $\frac{35\,000 \cdot 18}{118} \approx 5338,98$ Lt; b) $\approx 7627,12$ Lt; c) $\approx 228\,813,56$ Lt; d) $\approx 45\,762,71$ Lt.

529. a) $125 \cdot 0,24 = 30\,(\text{Lt})$; b) $125 + 30 = 155\,(\text{Lt})$; c) $\frac{155 \cdot 18}{118} \approx 23,64\,(\text{Lt})$; d) $(30 - 23,64) \cdot 10 = 63,6\,(\text{Lt})$.

530. a) $1920 \cdot 1,29 = 2476,8\,(\text{Lt})$; b) $\frac{2476,8 \cdot 18}{118} \approx 377,82\,(\text{Lt})$; c) $(2476,8 - 1920 - 377,82) \cdot 15 = 2684,7\,(\text{Lt})$.

531. Įmonės pelno mokestis ir grynasis pelnas:
a) $667 \cdot 0,24 = 160,08\,(\text{Lt})$, $667 - 160,08 = 506,92\,(\text{Lt})$;
b) $301,6 \cdot 0,24 \approx 72,38\,(\text{Lt})$, $301,6 - 72,38 = 229,22\,(\text{Lt})$;
c) $12\,000 \cdot 0,24 = 2880\,(\text{Lt})$, $12\,000 - 2880 = 9120\,(\text{Lt})$;
d) $2400 \cdot 0,24 = 576\,(\text{Lt})$, $2400 - 576 = 1824\,(\text{Lt})$.

532. a) Pelno mokestis yra $1500 \cdot 0,1 = 150\,(\text{Lt})$; grynasis pelnas yra 1350 Lt.
b) Pelnas yra $\frac{192 \cdot 100}{24} = 800\,(\text{Lt})$; grynasis pelnas yra $800 - 192 = 608\,(\text{Lt})$.
c) Pelnas yra $\frac{558 \cdot 100}{90} = 620\,(\text{Lt})$; pelno mokestis yra $620 - 558 = 62\,(\text{Lt})$.
d) Pelnas yra $\frac{193,8 \cdot 100}{76} = 255\,(\text{Lt})$; pelno mokestis yra $255 - 193,8 = 61,2\,(\text{Lt})$.

533. *Pastaba.* Reikia patikslinti sąlygą: „Kitos išlaidos sudarė: *pridėtosios vertės mokestis (18%) už parduotas prekes*, patalpų..."
a) $\frac{45\,000 \cdot 18}{118} \approx 6864,41\,(\text{Lt})$;
b) $29\,000 + 6864,41 + 1500 + 650 + 4000 + 600 + 122,6 = 42\,737,01\,(\text{Lt})$;
c) $45\,000 - 42\,737,01 = 2262,99\,(\text{Lt})$;
d) $2262,99 \cdot 0,24 \approx 543,12\,(\text{Lt})$;
e) $2262,99 - 543,12 = 1719,87\,(\text{Lt})$.

534. a) $\approx 2318,64$ Lt; b) 14 888,64 Lt; c) 311,36 Lt; d) $\approx 74,73$ Lt; e) 236,63 Lt.

535. a) Sofos kaina perkant išsimokėtinai yra $1500 \cdot 0,4 + 120 \cdot 9 = 1680\,(\text{Lt})$.
Palūkanos yra $1680 - 1500 = 180\,(\text{Lt})$.
Pasiskolinta suma yra $1500 - 600 = 900\,(\text{Lt})$.
Palūkanų norma: $180 = 900 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{9}{12}$, $p = 26\frac{2}{3}\%$.
b) 40%.

536. a) $100 = 98,23\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{73}{365}\right)$; $p \approx 9,009\%$; b) $p \approx 10,501\%$.

537. a) Akcijos nominalioji vertė yra $\frac{380\cdot100}{95} = 400\,(\text{Lt})$. Akcija buvo nupirkta už $\frac{400\cdot90}{100} = 360\,(\text{Lt})$.
Pelnas $380 - 360 = 20\,(\text{Lt})$.
b) Akcijos nominalioji vertė yra $\frac{280\cdot100}{112} = 250\,(\text{Lt})$. Akcija buvo nupirkta už $\frac{250\cdot105}{100} = 262{,}5\,(\text{Lt})$.
Pelnas $280 - 262{,}5 = 17{,}5\,(\text{Lt})$.

538. a) $S_3 = 3250\,\text{Lt}$, $S_4 = 3500\,\text{Lt}$; b) $P_3 = 750\,\text{Lt}$, $P_4 = 1000\,\text{Lt}$;
c) $250 = 2500\cdot\frac{p}{100}\cdot 1$, $p = 10\%$;
d) $2500 + 2500\cdot\frac{10}{100}\cdot 2 + 2500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{7}{12} \approx 3145{,}83\,(\text{Lt})$
(arba: 2 m. 7 mėn. = 31 mėn.; $S_{31\ \text{mėn.}} = 2500\left(1+\frac{10}{100}\cdot\frac{31}{12}\right) \approx 3145{,}83\,(\text{Lt})$);
$2500 + 2500\cdot\frac{10}{100}\cdot 3 + 2500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{11}{12} + 2500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{4}{360} \approx 3481{,}94\,(\text{Lt})$
(arba: 3 m. 11 mėn. 4 d. = 1414 d.; $S_{1414\ \text{d.}} = 2500\left(1 + \frac{10}{100}\cdot\frac{1414}{360}\right) \approx 3481{,}94\,(\text{Lt})$).
e) Palūkanos už 1 dieną yra $2500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{360} = \frac{25}{36}\,(\text{Lt})$.
$P(d) = \frac{25}{36}d$, $0 \leqslant d \leqslant 1440$; $P(1001) \approx 695{,}14\,\text{Lt}$; $P(800) \approx 555{,}56\,\text{Lt}$.
f) Palūkanos už 1 mėnesį yra $2500\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{12} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\,(\text{Lt})$.
$S(m) = 2500 + 20\frac{5}{6}m$, $0 \leqslant m \leqslant 48$; $S(30) = 3125\,\text{Lt}$; $S(45) = 3437{,}5\,\text{Lt}$.

539. Pagal aritmetinės progresijos n-tojo nario formulę: $a_n = 32 + (n-1)\cdot(-1{,}5) = 33{,}5 - 1{,}5n$.
Skaičius B yra aritmetinės progresijos narys, jeigu lygties $33{,}5 - 1{,}5n = B$ sprendinys n yra *natūralusis skaičius*.
a) $33{,}5 - 1{,}5n = 0$; $n = 22\frac{1}{3}$. Kadangi $22\frac{1}{3} \notin N$, tai 0 nėra aritmetinės progresijos narys;
b) $33{,}5 - 1{,}5n = -28$; $n = 41$. Kadangi $41 \in N$, tai -28 yra aritmetinės progresijos narys;
c) 7 nėra aritmetinės progresijos 41 narys;
d) -40 yra aritmetinės progresijos 49 narys.

540. a) Dešimtą savaitę šeima sutaupys $10 + 5\cdot 9 = 55\,(\text{Lt})$, o dvyliktą savaitę — $10 + 5\cdot 11 = 65\,(\text{Lt})$.
b) Per 10 savaičių šeima sutaupys $\frac{10+55}{2}\cdot 10 = 325\,(\text{Lt})$, o per 12 savaičių — $\frac{10+65}{2}\cdot 12 = 450\,(\text{Lt})$.

541. a) 500 ploto vienetų; b) $166\frac{2}{3}\sqrt{15}$ tūrio vienetų.

542. *Pastaba.* Sąlygą reikėtų papildyti klausimu: „Kiek reikia skardos lakštų stogui uždengti?“
a) 2,5 m;
b) $5\pi \approx 15{,}7\,(\text{m}^2)$. *Nurodymas.* Stogo paviršiaus plotas lygus kūgio šoninio paviršiaus plotui.);
c) $2\pi\ \text{cm}^3$.
Aukščiau pateikto papildomo klausimo sprendimas:
vieno lakšto plotas yra $1{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}98\,(\text{m}^2)$. Todėl stogui uždengti reikia $15{,}7\cdot 1{,}1 \approx 17{,}27\,(\text{m}^2)$ skardos, t. y. $17{,}27 : 0{,}98 \approx 18$ (lakštų).

543. $\frac{5}{36}$.

544. Kadangi trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas dalija jas santykiu $1 : 2$, tai pusiaukraštinių ilgiai yra $\frac{4\cdot3}{2} = 6\,(\text{cm})$ ir $\frac{5\cdot3}{2} = 7{,}5\,(\text{cm})$.

545. a) $\frac{4-a}{3}$; b) $\frac{x-2}{x}$; c) $\frac{x+1}{x-5}$; d) $\frac{x-1}{x+3}$; e) $\frac{x+2}{4x+1}$; f) $\frac{3a+1}{a+1}$.

546. *Nurodymas.* Trupmeninio reiškinio skaitiklį ir vardiklį padauginkite iš:
a) b; b) a.

547. a) $y = -(x-5)^2 + 4$, t. y. $y = -x^2 + 10x - 21$;
b) $y = -(x+3)^2 - 1$, t. y. $y = -x^2 - 6x - 10$.

548. a) Jeigu virpsto ilgis yra x pėdų, tai skersinio ilgis $(x + 16)$ pėdų. Todėl pagal sąlygą: $2x + x + 16 = 40$, $x = 8$ (pėdos).
Virpsto ilgis yra 243,84 cm, o skersinio — 731,52 cm;
b) $73{,}152\cdot 24{,}384 \approx 1783{,}7\,(\text{dm}^2)$;
c) $\sqrt{731{,}52^2 + 243{,}84^2} \approx 770\,(\text{cm})$.

Futbolo vartų perimetras — dviejų virpstų ir skersinio ilgių suma.

549. $\frac{36\cdot4}{5} = 28{,}8\,(\text{Lt})$.

550. Nors sąlygoje tai ir nenurodyta, suprantama, kad už pralaimėjimą komandos taškų negauna. Kadangi nugalėtojas surinko 5 taškus, jis turėjo laimėti vieną susitikimą ir du sužaisti lygiosiomis. Įrašius šiuos rezultatus, kitų susitikimų baigtis beveik akivaizdi.
Atsakymas. E.

	A	B	C	D	Taškai
A		1	1	3	5
B	1		1	1	3
C	1	1		1	3
D	0	1	1		2

10.5. Verslo atsiperkamumas

Šis skyrelis skirtas tiems moksleiviams, kurie tikrai nori susipažinti su ekonomikos pagrindais. Jame pateikiamos gana specialios žinios apie verslo organizavimą. Tyrinėjamos verslo *atsiperkamumo* sąlygos:

1. Kiek mažiausiai gaminių (prekių) turi būti realizuota iš anksto numatyta kaina, kad būtų padengtos bendrosios verslo išlaidos.
2. Už kokią kainą reikia parduoti gaminį (prekę) apytiksliai jaučiant rinką ir numatant, kiek gaminių (prekių) pavyks realizuoti.

Tačiau verslo organizavimo esmė yra ne tik jo atsiperkamumas, bet ir *pelno* gavimas per kaip galima trumpesnį laiką. Šios problemos skyrelyje sprendžiamos nagrinėjant *įplaukas* ir *bendrąsias išlaidas* (*sąnaudas*) ne tik analiziniu, bet ir grafiniu būdu. Be to, bendrosios išlaidos skirstomos į *kintamąsias* ir *pastoviąsias*. Baigiant nagrinėti skyrelį būtų tikslinga, kad mokiniai parengtų savo įsivaizduojamo verslo projektą ir jame panaudotų visas ekonomikos žinias, kurias įgijo šiame matematikos kurse.

Pakartoti:

žinias apie gamybą ir prekybą;
įplaukų skaičiavimą;
tiesinių lygčių ir nelygybių sprendimą;
tiesinių funkcijų grafikų braižymą.

Išmokti:

apskaičiuoti verslo bendrąsias, kintamąsias ir pastoviąsias išlaidas; verslo atsiperkamumą; pelną (nuostolį); tyrinėti verslo atsiperkamumą analiziniu arba grafiniu būdu.

Šiame skyrelyje:

1. Aptariamas verslo tikslas bei jo organizavimo sąlygos, nagrinėjami konkretūs pavyzdžiai.
2. Akcentuojami du svarbiausi verslo atsiperkamumo klausimai:
   - kiek mažiausiai reikia realizuoti gaminių, žinant vieno gaminio kainą;
   - kokia turi būti gaminio kaina, numačius, kiek jų pavyks realizuoti.
3. Daroma išvada, kad gaminio realizavimo kaina turi būti aukštesnė už savikainą (įsigijimo kainą). Pavyzdžiui, prekybos ar paslaugų teikimo atveju — net 18% (PVM mokesčio tarifas).
4. Užduotis parodo, kaip svarbu pelną gauti kiek galima greičiau. Suprantama, supirkti 800 butelių ir po pusmečio parduoti 3 centais brangiau nelabai rimtas verslas. Atrodytų, jis vis dėlto duoda 24 litus pelno. Tačiau atmetus dar 20 litų išlaidų lieka vos 4 litai. Tai toks mažas pelnas, kad net padėjus pradinę išleistą sumą $22\,(\text{ct})\cdot 800 = 176\,(\text{Lt})$ į banką už 7% palūkanas per pusmetį galima uždirbti daugiau. Iš tikrųjų, metinės palūkanos būtų $176\cdot 0{,}07 = 12{,}32\,(\text{Lt})$, o pusmetinės — 6,16 Lt.
5. Nagrinėjamas verslo *pelningumas* arba *nuostolingumas*. Atsakant į pirmąjį klausimą aišku, kad riba yra 9250 Lt per mėnesį.
   Kad krėslų gamyba būtų pelninga, įplaukos turi viršyti bendrąsias išlaidas, t. y. 9250 Lt.
   Krėslų gamybos verslas bus nuostolingas, jeigu įplaukos per mėnesį bus mažesnės negu 9250 Lt.
6. Mokoma iš bendrųjų išlaidų išskirti *kintamąsias* ir *pastoviąsias išlaidas*.
   Atsakant į antrąjį klausimą reikia samprotauti taip: kadangi telefono įvedimo išlaidos tiesiogiai neįeina į krėslo gamybos sąnaudas ir mokėjimas už įvedimą nepriklauso nuo pagamintų krėslų kiekio, tai jos priklauso *pastoviosioms išlaidoms*.
7. Prekybos karštais pyragėliais verslas tyrinėjamas dviem būdais — analiziniu ir grafiniu. Kadangi moteris užsiima smulkiu verslu ir moka patento mokestį, į pyragėlio pardavimo (mažmeninę) kainą neįskaičiuojamas PVM.
8. Spręsdami tiek vienu, tiek kitu būdu įsitikiname, jog verslas:
   - *atsiperka*, kai įplaukos lygios bendrosioms išlaidoms;
   - *pelningas*, kai įplaukos viršija bendrąsias išlaidas;
   - *nuostolingas*, kai įplaukos mažesnės už bendrąsias išlaidas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai skyrelio uždaviniai yra 551–558. 102–110

551. Sakykime, kad reikia parduoti x megztinių. Tuomet bendrosios išlaidos bus $(18\,000 + 80x)$ Lt. Tada:
a) įplaukos — $100x$ Lt; $100x = 18\,000 + 80x$, $x = 900$; b) 1200; c) 720; d) 1500.

552. Sakykime, kad sijonus reikia parduoti po x Lt.
a) Įplaukos yra $1000x$ Lt. Bendrosios išlaidos: $12\,000 + 60\cdot 1000 = 72\,000\,(\text{Lt})$. $1000x = 72\,000$, $x = 72$ Lt;
b) 68 Lt; c) 70 Lt; d) 67,5 Lt.

553. Dirbtuvė batus parduotuvei parduoda po $100\cdot 1{,}2 = 120\,(\text{Lt})$.
a) Įplaukos yra $120\cdot 450 = 54\,000\,(\text{Lt})$; bendrosios išlaidos: $12\,000 + 100\cdot 450 = 57\,000\,(\text{Lt})$, nuostolis: $57\,000 - 54\,000 = 3000\,(\text{Lt})$;
b) nuostolis 2000 Lt; c) pelnas 2000 Lt; d) pelnas 5000 Lt; e) pelnas 6000 Lt.

554. a) Sakykime, kad reikia parduoti x šildytuvų. Tada įplaukos sudarys $118x$ Lt, o bendrosios išlaidos, įskaitant ir PVM:
$25\,000 + 75x + \frac{118x \cdot 18}{118} = 25\,000 + 93x$ (Lt).
Pagal sąlygą: $118x = 25\,000 + 93x$, $x = 1000$.

b) Šildytuvo antkainis be PVM yra $118 - 75 - \frac{118 \cdot 18}{118} = 25$ (Lt), todėl pajamos pardavus 1100 šildytuvų bus $25 \cdot 1100 = 27\,500$ (Lt), o pelnas:
$27\,500 - 25\,000 = 2500$ (Lt).

c) $2500 \cdot 0{,}76 = 1900$ (Lt).

d) $25\,000 - 25 \cdot 800 = 5000$ (Lt).

e) Sakykime, kad vieną šildytuvą reikia parduoti už x Lt. Tada įplaukos bus $800x$ (Lt), o bendrosios išlaidos su PVM — $\left(25\,000 + 75 \cdot 800 + \frac{800x \cdot 18}{118}\right)$ Lt.
Pagal sąlygą: $800x = 85\,000 + \frac{7200x}{59}$, $x \approx 125{,}37$ Lt.

$118x$ Lt — 118%,
? Lt — 18%.

2500 Lt — 100%,
y Lt — (100 − 24)%.

$800x$ Lt — 118%,
z Lt — 18%.

555. Sakykime, kad mokestis vienam žmogui yra x Lt. Tuomet:

a) įplaukų bus $24x$ Lt, o bendrųjų išlaidų — $540 + 3 \cdot 24 = 612$ (Lt).
Todėl $24x = 612$, $x = 25{,}5$;

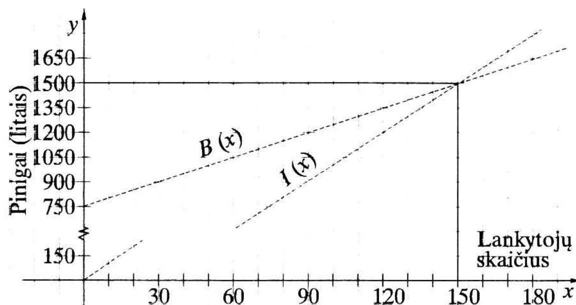
b) $30x = 630$, $x = 21$; c) $x \approx 19{,}88$; d) $x = 18$.

556. Diskotekos pastoviosios išlaidos lygios $350 + 250 + 150 = 750$ (Lt).

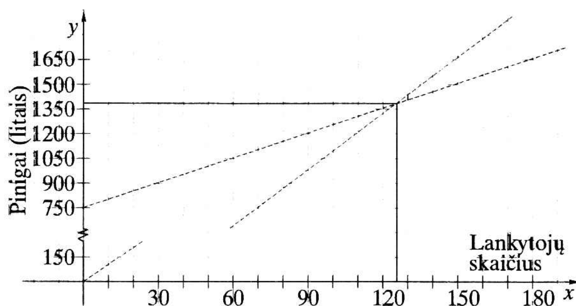
a) Bendrosios išlaidos dalyvaujant:
100 dalyvių yra $750 + 5 \cdot 100 = 1250$ (Lt);
200 dalyvių yra $750 + 5 \cdot 200 = 1750$ (Lt);
250 dalyvių yra $750 + 5 \cdot 250 = 2000$ (Lt);
x dalyvių yra $(750 + 5x)$ Lt.

b) Sakykime, kad įėjimo mokestis vienam žmogui yra a Lt.
Tada $ax = 750 + 5x$ ir $a = \left(5 + \frac{750}{x}\right)$ Lt;
kai $x = 100$, tai $a = 5 + \frac{750}{100} = 12{,}5$ (Lt);
kai $x = 125$, tai $a = 11$ Lt;
kai $x = 200$, tai $a = 8{,}75$ Lt;
kai $x = 250$, tai $a = 8$ Lt;
kai $x = 80$, tai $a \approx 14{,}38$ Lt.

c) Sakykime, kad lankytojų turi būti x. Tada: funkcija $I(x) = 10x$ atitinka įplaukas litais; funkcija $B(x) = 750 + 5x$ — bendrąsias išlaidas litais. $I(x) = B(x)$, kai $x = 150$ (lankytojų).



d) Jei įėjimo mokestis yra 11 Lt ir ateis x lankytojų, tai funkcija $I(x) = 11x$ atitinka įplaukas litais;
funkcija $B(x) = 750 + 5x$ — bendrąsias išlaidas litais.



Klubas patiria nuostolį, kai $I(x) < B(x)$, t. y. jeigu lankytojų skaičius mažesnis negu 125; turi pelno, kai $I(x) > B(x)$, t. y. jeigu lankytojų skaičius didesnis negu 125.

557. a) Sakykime, kad kasdien valgyklai reikia x lankytojų. Pagal sąlygą: $8x = 300 + 5x$, $x = 100$.
b) Jei yra 120 lankytojų, tai valgyklos pelnas yra $(8-5)\cdot 20 = 3\cdot 20 = 60$ (Lt). Jei yra 90 lankytojų, tai valgyklos nuostolis yra $(8-5)\cdot 10 = 30$ (Lt).

558. a)

Parduota porcijų (vienetais)	Išlaidos (Lt)	Pajamos (Lt)	Pelnas (nuostolis) (Lt)
0	240	0	−240
200	440	320	−120
400	640	640	0
600	840	960	120
800	1040	1280	240
1000	1240	1600	360
1200	1440	1920	480

b) $1{,}6x$ Lt; c) $(240 + x)$ Lt; d) $0 \leqslant x \leqslant 1200$;
e) mažiausios pajamos (įplaukos) gali būti 0 Lt, o didžiausios — 1920 Lt;
f) $1{,}6x - (240 + x) = 0{,}6x - 240$ (Lt);
g) Daivos ir Vaidoto išlaidos atsipirks, kai pelnas (nuostolis) bus lygus 0, t. y. kai $0{,}6x - 240 = 0$, $x = 400$ — pardavus 400 porcijų;
h) nelygybės $0{,}6x - 240 > 0$ prasmė — Daiva ir Vaidotas turi pelno, nelygybės $0{,}6x - 240 < 0$ prasmė — nuostolis.
$0{,}6x - 240 > 0$, $x > 400$ — jeigu Daiva ir Vaidotas parduoda per dieną daugiau negu 400 porcijų, tai turi pelno.
$0{,}6x - 240 < 0$, $x < 400$ — jeigu Daiva ir Vaidotas parduoda mažiau kaip 400 porcijų per dieną, tai patiria nuostolio.

559. $5400 + 5400 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{16{,}5}{12} = 6291$ (Lt).

1 m. 4,5 mėn. = 16,5 mėn.

560. a) Akcijos parduotos už $500 \cdot 0{,}97 = 485$ (Lt), todėl pelnas yra $485 - 480 = 5$ (Lt).
b) Akcijos parduotos už $500 \cdot 1{,}02 = 510$ (Lt), todėl pelnas yra $510 - 480 = 30$ (Lt).

500 Lt — 100%,
x Lt — (100 − 3)%.

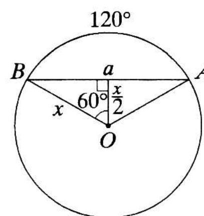
561. 6; a_2; a_3; a_4; a_5; 2, todėl $a_1 = 6$, $a_6 = 2$. $a_6 = a_1 + 5d$; $2 = 6 + 5d$, $d = -0{,}8$.
a) $S_{20} = \frac{a_1+a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{6-9{,}2}{2} \cdot 20 = -32$, nes $a_{20} = 6 + 19 \cdot (-0{,}8) = 6 - 15{,}2 = -9{,}2$;
b) $S_{30} = \frac{a_1+a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{6-17{,}2}{2} \cdot 30 = -168$, nes $a_{30} = 6 + 29 \cdot (-0{,}8) = 6 - 23{,}2 = -17{,}2$.

562. a) Kubo paviršiaus plotas lygus $6a^2$, o rutulio — $4\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2$.
Rutulio paviršius sudaro $\frac{\pi a^2 \cdot 100}{6a^2} = 16\frac{2}{3}\pi$ (%) kubo paviršiaus.
b) Kubo tūris lygus a^3, o rutulio — $\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.
Rutulio tūris sudaro $\frac{\pi a^3 \cdot 100}{6a^3} = 16\frac{2}{3}\pi$ (%) kubo tūrio.

563. Galimų atvirtimų skaičius yra $36 = 6 \cdot 6$, t. y. $n = 36$.
Tenkinančių uždavinio sąlygą — 6, t. y. $m = 6$.
Todėl tikimybė, kad vieno kauliuko atvirs nelyginis akučių skaičius, o kito 6 akutės, lygi $\frac{6}{36}$, t. y. $\frac{1}{6}$.

564. a) $AB = 40$ cm, $AD = 30$ cm; b) 95 cm.

565. Nuopjovos plotas lygus trečdalio skritulio ir $\triangle AOB$ plotų skirtumui, t. y.
$\frac{1}{3}S_{\text{skritulio}} - S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$,
nes $x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ ir $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



566. **D**.
Pastaba. Tikslinga klausimą papildyti užduotimi: *„Parašykite teisingą lygybę bendruoju atveju“.*
Sprendimas.

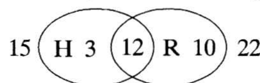
$$\sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{n^2 \cdot n}{n^2-1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}};$$

$$\sqrt[3]{n + \frac{n}{n^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{n^4-n+n}{n^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{n^3 \cdot n}{n^3-1}} = n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}.$$

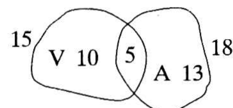
11. TYRIMO UŽDAVINIAI

11.1. Oilerio skrituliai

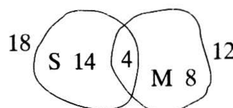
1. Uždavinio sąlygą patogu vaizduoti schema — dviem susikertančiais skrituliais: viename skritulyje vaizduojame humanitariniais dalykais besidominčių mokinių skaičių, kitame — realiniais.
Bendroji skritulių dalis atitinka skaičių mokinių, kurie domisi ir humanitariniais, ir realiniais dalykais.
Remdamiesi schema galime atsakyti į uždavinio klausimą.
a) Tik humanitariniai mokslai patinka $15 - 12 = 3$ devintokams.
b) Tik realiniai mokslai patinka $22 - 12 = 10$ devintokų.
Atsakymas. a) 3; b) 10.



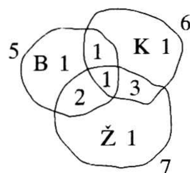
2. Kadangi klasėje yra 28 mokiniai, o anglų kalbos mokosi 18 mokinių, tai tik vokiečių kalbos mokosi $28 - 18 = 10$ mokinių, o tik anglų kalbos mokosi $28 - 15 = 13$ mokinių.
Vadinasi, abiejų kalbų mokosi $28 - (10 + 13) = 5$ mokiniai.
Atsakymas. 5.



3. 18 mokinių lanko sporto būrelį, o 4 iš jų — ir muzikos būrelį. 12 mokinių lanko muzikos būrelį, o 4 iš jų — ir sporto.
Mokinių skaičių klasėje galime rasti keliais būdais:
I būdas. $18 + (12 - 4) = 26$ (mokiniai);
II būdas. $12 + (18 - 4) = 26$ (mokiniai);
III būdas. $18 + 12 - 4 = 26$ (mokiniai).
Atsakymas. 26 mokiniai.

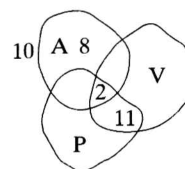


4. Uždavinio sąlygoje pateiktus duomenis iliustruokime Oilerio skrituliais.



Vienam vaikui patinka tik barščiai, vienam vaikui patinka tik barščiai ir kopūstai, vienam — tik kopūstai, trims — tik kopūstai ir žirniai, vienam — tik žirniai, dviem — tik barščiai ir žirniai, vienam — visos trys sriubos. Vadinasi, šeimoje yra $1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 10$ vaikų.
Atsakymas. Šeimoje yra 10 vaikų.

5. 8 žmonės moka tik angliškai, 11 — tik prancūziškai ir vokiškai, 2 — angliškai, vokiškai ir prancūziškai. Grupėje turėtų būti ne 17, o 21 žmogus.
Atsakymas. Klaidingi.

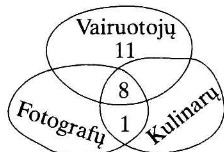


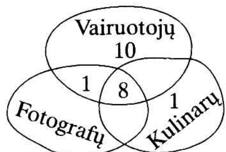
6.

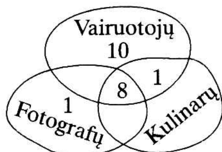


7. a) Ir lietuviškai, ir angliškai, ir rusiškai moka 12 varžybų dalyvių.
b) Ir lietuviškai, ir angliškai moka 29 varžybų dalyviai $(12 + 17 = 29)$.
Ir lietuviškai, ir rusiškai moka 26 varžybų dalyviai $(12 + 14 = 26)$.
Ir angliškai, ir rusiškai moka 27 varžybų dalyviai $(12 + 15 = 27)$.
c) Lietuviškai moka $62 + 14 + 12 + 17 = 105$ (varžybų dalyviai).
Angliškai moka $50 + 15 + 12 + 17 = 94$ (varžybų dalyviai).
Rusiškai moka $48 + 14 + 12 + 15 = 89$ (varžybų dalyviai).
d) Angliškai nemoka $48 + 14 + 62 = 124$ (varžybų dalyviai).
Lietuviškai nemoka $48 + 15 + 50 = 113$ (varžybų dalyvių).
Rusiškai nemoka $50 + 17 + 62 = 129$ (varžybų dalyviai).
e) Iš viso sporto varžybų dalyvių: $62 + 48 + 50 + 15 + 12 + 14 + 17 = 218$.
Atsakymas. a) 12; b) 29; 26; 27; c) 105; 94; 89; d) 124; 113; 129; e) 218.

8.







I būdas. Visų trijų būrelių negali lankyti 9 merginos (ar daugiau) — tada į šį skaičių įeitų visos merginos, lankančios fotografų ir kulinarų būrelius, bet tai reikštų, kad visos lanko vairuotojų būrelį, o taip nėra. 8 merginos lankyti visus tris būrelius gali. Tai iliustruoja bet kuris iš trijų pavaizduotų Oilerio skrituliais atvejų.

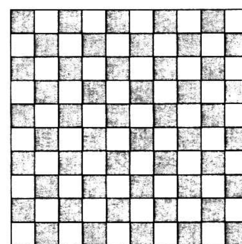
II būdas. Kadangi viena mergina nelanko automobilio vairuotojų būrelio, tai ji lanko kažkurį iš kitų būrelių, todėl arba fotografų, arba kulinarų būrelyje iš 9 merginų ne daugiau kaip 8 lanko visus tris būrelius. O taip pagal Oilerio skritulių schemą būti gali.

III būdas. Pavadinkime „nesuspėjančia" merginą, nelankančią bent vieno iš trijų būrelių. Tegul visus tris būrelius lanko n merginų, tada „nesuspėjančių" yra $20 - n$. Kita vertus, „nesuspėjančių" vairuotojų yra $19 - n$, fotografių ir kulinarių — po $(9 - n)$. Visų šių trijų visumų sąjunga apima pirmąją, todėl $(19 - n) + (9 - n) + (9 - n) \geqslant 20 - n$. Iš čia $n \leqslant 8{,}5$. Kadangi n — natūralusis skaičius, tai $n \leqslant 8$.

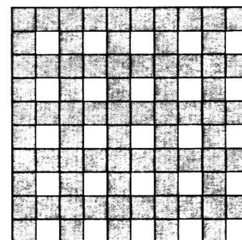
11.2. Invariantai

9. Trylika A pavidalo ir dviem B pavidalo figūromis galima uždengti 60 langelių. Kadangi lentelėje yra 64 langeliai, nurodytu skaičiumi figūrų jos uždengti negalime.
Atsakymas. Negalima.

10. a) Nudažykime lentelę juodai ir baltai šachmatiškai. Figūra galima uždengti tris juodus arba tris baltus šachmatų lentos langelius. Tarkime, kad n figūrų dengia po tris juodus langelius, o $(25 - n)$ figūros po vieną juodą langelį. Jeigu pavyktų uždengti lentelę, tai uždengtų juodų langelių skaičius būtų lygus 50. Tuomet turėtų būti teisinga lygybė $3n + (25 - n) = 50$, arba $2n = 25$. Kadangi nėra tokių natūraliųjų skaičių, kurie tenkintų lygybę, darome išvadą, kad duotosiomis figūromis uždengti lentelės negalima.



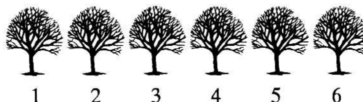
b) Nudažykime lentelę taip: Juostele galima uždengti 0 arba 2 baltus langelius. Jeigu juostelėmis uždengtume visą lentelę, tai uždengtų baltų langelių skaičius turėtų būti lyginis. Lentelėje yra 25 balti langeliai — langelių skaičius nelyginis. Vadinasi, 25-iomis juostelėmis lentelės uždengti negalima.



11. 11-kos užrašytų skaičių suma — nelyginis skaičius. Du išbraukus ir prirašius 1 arba 0, skaičių suma nepasikeis arba pasikeis 2. Skaičių suma — nelyginis skaičius. Ji nekinta, tai — invariantas. Po 10 operacijų liks vienas skaičius. Jis turi būti nelyginis, t. y. 1.

12. Kadangi, atliekant nurodytas operacijas, pridedamas arba atimamas vienodas raidžių A ir B skaičius, tai A ir B raidžių skirtumas buvusiame ir naująjame žodyje išlieka toks pats. Raidžių A ir B skaičių skirtumas žodyje — invariantas.
1) Žodžiai nėra sinonimai, nes raidžių A skaičiaus ir raidžių B skaičiaus skirtumas juose nevienodas.
2) Nėra.
(Sąlygos pavyzdyje nurodytuose žodžiuose raidžių A ir B skaičių skirtumas lygus 0.)

13. a) Sunumeruokime šešis medžius, kaip parodyta.



Paukščiui suteikime medžio numerį. Medžių numerių suma yra 21. Į kitą medį perskridusio paukščio numeris pakinta tam tikru skaičiumi. Kito paukščio numeris pakinta priešingu skaičiumi. Taigi numerių suma nekinta ir yra invariantas. Kadangi 21 nėra skaičiaus 6 kartotinis, tai į vieną medį visi paukščiai neatskris. (Pavyzdžiui, jei visi susirinktų į 4-tą medį, tai visų jų numeriai būtų vienodi ir lygūs 4, bet $6 \cdot 4 = 24 \neq 21$.)

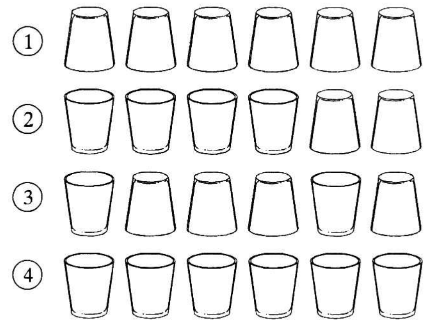
b) Jeigu medžiai 7, tai jokios prieštaros panašiai kaip punkte a) samprotaudami negautume, nes medžių numerių suma lygi $21 + 7 = 28$.
Ir iš tikrųjų — lengva nurodyti, kaip paukščiams suskristi į ketvirtą medį: iš pradžių į ketvirtą medį perskrenda pirmas ir septintas paukščiai, po to į ketvirtą medį perskrenda antras ir šeštas paukščiai, pagaliau ten pat atskrenda trečias ir penktas paukščiai.
Beje, suskristi paukščiai gali tik į ketvirtą medį: kitaip jų numerių suma nebūtų lygi invariantui 28.
Atsakymas. Ne.

14. a) Nagrinėkime 7 stiklinių atvejį. Tarkime, kad „normaliai" stovinčią stiklinę atitinka skaičius 1, o apverstą dugnu aukštyn — skaičius -1. Imkime skaičių sandaugą. Pradinėje padėtyje sandauga lygi -1. Kai apverčiamos 4 stiklinės, 4 dauginamieji keičia ženklą, o sandaugos ženklas nekinta. Todėl niekada negausime sandaugos, lygios 1.

b) Kai stiklinės šešios, tai padaryti galima, pavyzdžiui, taip:

c) Devynių stiklinių atvejo nagrinėjimas nesiskiria nuo punkto a).

Atsakymas. Neįmanoma, kai yra 7 arba 9 stiklinės; įmanoma, kai yra šešios stiklinės.



15. a) Iš pradžių išsiaiškinkime, kiek reikėtų perversti geltonų kortelių, kad geltonų kortelių skaičius taptų lygus 17. Sakykime, kad apverčiame n geltonų, tada iš 8 geltonų liko $(8 - n)$ geltonų. Kadangi apverčiame $(17 - n)$ žalių, tai jos taps geltonomis. Iš viso bus $(8 - n) + (17 - n)$ geltonų. Todėl $25 - 2n = 17$; $n = 4$. Vadinasi, galėtume daryti taip: 1) 4 geltonas korteles perverčiame į žalias, o 13 žalių — į geltonas. Po šios operacijos žalių kortelių bus 13, o geltonų — 17. 2) Geltonas korteles perverčiame į žalias.

b) Tarkime, kad n kortelių pakeitė spalvą iš geltonos į žalią, o $(17 - n)$ — iš žalios į geltoną. Tuomet po pirmo ėjimo žalių kortelių būtų: $n + 22 - (17 - n) = 5 + 2n$. Žalių kortelių skaičius bus 17, kai $n = 6$.

Vadinasi, galėtume daryti taip: 1) 6 geltonas korteles paverčiame žaliomis, o 11 žalių — geltonomis. Tuomet bus 13 geltonų ir 17 žalių kortelių. 2) Žalias korteles paverčiame geltonomis.

Atsakymas. a) Taip; b) taip.

16. Nutrynus A ir B ir parašius $A+B-1$, visų skaičių suma sumažėja vienetu. Iš pradžių suma lygi $1+2+\cdots+20 = 210$; po 19 operacijų ji pasidarys lygi $210 - 19 = 191$. Bet po 19 operacijų lentoje liks vienintelis skaičius, nes kiekviename žingsnyje skaičių kiekis sumažėja vienetu, taigi jis bus lygus 191.

Atsakymas. 191.

17. Padidinkime kiekvieną skaičių vienetu ir visus skaičius sudauginkime. $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1) \cdot \ldots \cdot (20 + 1) = 21!$. Toliau ši sandauga nekinta, tai — invariantas. Iš tikrųjų, nutrynus A ir B, o jų vietoje prirašius $AB + A + B$, visų skaičių sandauga nepasikeis, nes $AB + A + B + 1 = (A + 1)(B + 1)$. Bet po 19 operacijų lentoje liks vienintelis skaičius, kuris padidintas vienetu lygus $21!$.

Atsakymas. $21! - 1$.

18. Kadangi dėmenų liekanų suma lygi sumos liekanai, tai po 124 tokių operacijų liks vienas skaičius, lygus liekanai, gautai skaičių $1, 2, 3, \ldots, 125$ sumą padalijus iš 11-os.

Atsakymas. 10.

19. Skaičių a, b, c, d ir $\frac{b+c+d}{3}$, $\frac{a+c+d}{3}$, $\frac{a+b+d}{3}$, $\frac{a+b+c}{3}$ sumos yra vienodos. $3+4+5+6 \neq 1+3+5+8$, todėl ketverto 1, 3, 5, 8 negalima gauti.

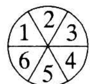
20. Skaičių suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 49 = 25 \cdot 49$ — nelyginis skaičius. Vietoj 2-jų skaičių sumos atsiras skirtumas, bet suma ir skirtumas yra to paties lyginumo, nes $A + B = (A - B) + 2B$. Vadinasi, visų skaičių sumos dalijimo iš 2 liekana yra 1 ir nekinta (yra invariantas). Todėl, tęsiant operaciją, negalima gauti vien tik nulių, nes jų suma lyginė.

21. Sukarpius lapą į 4 dalis, lapų skaičius padidėja 3.

$6 + 3k = 48$, $k = 14$; $6 + 3k = 58$, $3k = 52$, $k \notin \mathbf{N}$.

Atsakymas. 50 galima, 60 negalima.

22. Iš pradžių bendras baltų langelių skaičius yra nelyginis. Perdažant keičiama kiekvienos eilutės ar stulpelio langelio spalva: juodas tampa baltu, o baltas tampa juodu. Kadangi eilutėje (stulpelyje) yra 8 langeliai, tai jos baltų ir juodų langelių skaičiai arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai, taigi perdažant juodų ir baltų langelių skaičiaus lyginumas nepasikeičia. Nudažius lentelę baltai, baltų langelių skaičius būtų lyginis.

23. Sunumeruokime sektorius 

. S — sektoriuose esančių kubelių numerių suma.

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Sakykime, kad kubelis įgyja tokį numerį, koks yra sektoriaus numeris, pavyzdžiui,



$S = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 6 = 19$. Perkėlus kubelį į gretimą sektorių, keičiasi sumos lyginumas, perkėlus antrą — lyginumas atsistato. Perkėlus visus kubelius į vieną sektorių, suma būtų lyginis skaičius $6N$. $6N$ — lyginis skaičius, o 21 — nelyginis skaičius.

Atsakymas. Neįmanoma.

24. Kadangi kiekvienos eilutės skaičių suma lygi 1, tai jeigu sumuotume skaičius pagal eilutes, gautume sumą, lygią m. Kadangi ir kiekvieno stulpelio skaičių suma lygi 1, tai jeigu sumuotume pagal stulpelius, gautume n. Abiem atvejais gauname visų lentelės skaičių sumą. Vadinasi, $m = n$.

25. a) $53 \times 57 = \underbrace{30}_{5\cdot 6}\underbrace{21}_{3\cdot 7}$; $65 \times 65 = \underbrace{42}_{6\cdot 7}\underbrace{25}_{5\cdot 5}$; $91 \times 99 = \underbrace{90}_{9\cdot 10}\underbrace{09}_{9\cdot 1}$.

b) Taisyklę galima taikyti tuomet, kai abiejuose skaičiuose dešimčių skaitmuo vienodas, o vienetų skaitmenų suma lygi 10.

c) $120 \times 180 = \underbrace{2}_{1\cdot 2}\underbrace{16}_{2\cdot 8}00$; $530 \times 570 = \underbrace{30}_{5\cdot 6}\underbrace{21}_{3\cdot 7}00$; $230 \times 270 = \underbrace{6}_{2\cdot 3}\underbrace{21}_{3\cdot 7}00$; $950 \times 950 = \underbrace{90}_{9\cdot 10}\underbrace{25}_{5\cdot 5}00$;

$670 \times 630 = \underbrace{42}_{6\cdot 7}\underbrace{21}_{7\cdot 3}00$; $180 \times 120 = \underbrace{2}_{1\cdot 2}\underbrace{16}_{8\cdot 2}00$.

26. Tarkime, kad skirtingi vienaženkliai skaičiai a, b, c, d tenkina uždavinio sąlygą: $\overline{ab} \cdot \overline{dc} = \overline{ba} \cdot \overline{cd}$. Tada teisinga lygybė: $(10a + b)(10d + c) = (10b + a)(10c + d)$. Pertvarkę gauname, kad $a \cdot d = b \cdot c$. Galima sakyti, kad ketverte (a, b, c, d) bus $a < b$. Taip pat iš pradžių galima sakyti, kad $b < c$. Vadinasi, ieškome sprendinių, tenkinančių sąlygą $a < b < c < d$. Tokie sprendiniai yra (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 8), (2, 3, 4, 6), (2, 3, 6, 9), (3, 4, 6, 8). Bet buvo galima sukeisti vietomis, ir gausime dar 5 ketvertus: (1, 3, 2, 6), (1, 4, 2, 8), (2, 4, 3, 6), (2, 6, 3, 9), (3, 6, 4, 8). Jeigu nereikalautume, kad $b \neq c$, tai gautume dar 4 ketvertus: (1, 2, 2, 4), (1, 3, 3, 9), (2, 4, 4, 8), (4, 6, 6, 9).
Suprantama, uždavinyje nėra jokio reikalo nagrinėti ketvertus, kai $a > b$: pavyzdžiui, ketvertai (1, 2, 3, 6) ir (2, 1, 6, 3) duoda tą pačią lygybę: $12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$.
Atsakymas. Iš skirtingų skaičių galima sudaryti 10 ketvertų: (1, 2, 3, 6), (1, 3, 2, 6), (1, 2, 4, 8), (1, 4, 2, 8), (2, 3, 4, 6), (2, 4, 3, 6), (2, 3, 6, 9), (2, 6, 3, 9), (3, 4, 6, 8), (3, 6, 4, 8).

27. $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$.

28. Nuo 1:00 iki 9:59 yra po 6 tokius skaičius kiekvieną valandą. Pvz., nuo 3:00 iki 3:59 yra tokie skaičiai: 3:03, 3:13, 3:23, 3:33, 3:43, 3:53. Nuo 10:00 iki 12:59 yra po 1 skaičių: 10:01, 11:11 ir 12:21. Taigi iš viso yra: $9 \cdot 6 + 3 = 57$.

29. Jeigu bent vienas iš skaičių m ir n lyginis, tai kairė pusė lyginė. Jeigu abu skaičiai m ir n nelyginiai, tai suma $m + n$ lyginė.
Atsakymas. Ne.

30. Ne. Pvz., kai $n = 41$, tai skaičius $n^2 + n + 41$ nėra pirminis.

31. Imkime keturių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sumą: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4(n + 1) + 2$. Sumą dalijant iš 4 gaunama liekana 2.
Atsakymas. Taip.

32. a) Taip. Pvz., skaičius $101! + k$, $2 \leqslant k \leqslant 101$, dalijasi iš k be liekanos.
b) Didžiausias skaičius neegzistuoja — iš eilės einančių sudėtinių skaičių gali būti kiek norint daug. Iš tikrųjų — skaičiai $n! + 2$, $n! + 3$, $\ldots$, $n! + n$ — visi sudėtiniai.

33. $\underbrace{444\ldots4}_{2000} = \underbrace{444\ldots4}_{1997}000 + 444$. Pirmas dėmuo dalus iš 8, nes $1000 : 8 = 125$, o antras — ne, nes $444 = 4 \cdot 111$.
Suma nedali iš 8. Vadinasi, duotas skaičius nėra dalus iš 8.

34. $9n + 2$ — skaičius, kurį dalijant iš 9 gaunama liekana lygi 2; $6k + 1$ — skaičius, kurį dalijant iš 6 gaunama liekana lygi 1. Reikia patikrinti, ar įmanoma lygybė $9n + 2 = 6k + 1$; $9n + 1 = 6k$. Lygybė neįmanoma, kai n ir k natūralieji skaičiai, nes dešinėje lygybės pusėje esantis skaičius yra skaičiaus 3 kartotinis, o kairėje — ne. Vadinasi, tokio sveikojo skaičiaus nėra.

35. Pvz., kai $n = 7$, tai $2^7 + 15 = 143 = 11 \cdot 13$.

36. $c = a + b$, $d = c + b = a + 2b$, $e = d + c = 2a + 3b = 7$, $f = e + d = 3a + 5b$, $a + b + c + d + e + f = 8a + 12b = 4(2a + 3b) = 4 \cdot 7 = 28$.
Atsakymas. 28.

37. Skaičiaus gale prirašius 0 gaunamas skaičius, 10 kartų didesnis už buvusį. Tarkime, kad Petras turėjo sudėti skaičius a ir b, o sudėjo skaičius $10a$ ir b. Remiantis uždavinio sąlyga galima sudaryti lygčių sistemą: $\begin{cases} a + b = 2411, \\ 10a + b = 6641. \end{cases}$
Sistemos sprendinys: $a = 470$, $b = 1941$.
Atsakymas. 470 ir 1941.

38. Pradinį skaičių pažymėkime $\overline{ab}$; $\overline{ab} = 10a + b$. Sukeitę pradinio skaičiaus skaitmenis vietomis gauname skaičių $\overline{ba}$; $\overline{ba} = 10b + a$. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$. Kadangi suma yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, tai $a + b = 11$. Randame visas galimas skaitmenų a ir b reikšmes, kurių suma lygi 11.
Atsakymas. 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65.

39. Kadangi skaičiai surašomi didėjimo tvarka, tai pirmųjų šešių skaičių pirmasis skaitmuo yra 2, kitų šešių skaičių pirmasis skaitmuo yra 4, dar kitų šešių skaičių pirmasis skaitmuo yra 5. Taigi septynioliktas skaičius prasidėtų skaitmeniu 5. Surašykime juos: 5247, 5274, 5427, 5472, 5724, 5742. Septynioliktasis skaičius yra 5724.
Atsakymas. 5724.

40. Kadangi dešimties skirtingų natūraliųjų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 10, tai tų skaičių suma lygi 100. Didžiausią skaičių gausime, kai iš 100 atimsime devynis mažiausius, t. y. $100 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 55$.
Atsakymas. 55.

41. a) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right)=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdots\frac{14\cdot16}{15^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$.
b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{1024}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{512}-\frac{1}{1024}\right)=2-\frac{1}{1024}=1\frac{1023}{1024}$.
c) Tegul $2378=a$. Tada $(a+1)(a\cdot10\,000+a)-a\big((a+1)\cdot10\,000+(a+1)\big)=a(a+1)\cdot10\,001-a(a+1)\cdot10\,001=0$.
Atsakymas. a) $\frac{8}{15}$; b) $1\frac{1023}{1024}$; c) 0.

42. Duotąją trupmeną pakeiskime suma: $\frac{a+9}{a+6}=\frac{a+6+3}{a+6}=1+\frac{3}{a+6}$. Gautas reiškinys taps sveikuoju skaičiumi tuomet, kai reiškinio $a+6$ skaitinė reikšmė bus skaičiaus 3 daliklis. Vardiklio reikšmės gali būti ±1, ±3, todėl a reikšmės gali būti skaičiai: -9; -7; -5; -3.
Atsakymas. -9; -7; -5; -3.

43. Užrašykime du iš eilės einančius natūraliuosius skaičius n ir $n+1$. Tada aštuoniolikos kartotinis bus $18n$, o po jo einantis skaičius bus $18n+1$. Tačiau $18n+1$ yra septyniolikos kartotinis, tai $18n+1=17(n+1)$, $n=16$; $n+1=17$. Tada $16\cdot18=288$, $17\cdot17=289$.
Atsakymas. 288; 289.

44. Skaičiaus 1996^n paskutinis skaitmuo yra 6; skaičiaus 1996^n-1 paskutinis skaitmuo yra 5, todėl jis turi daugiklį 5, o $199{,}6\cdot5=998$.

45. Perkėlę kablelį skaičiuje į kairę per vieną skaitmenį gauname 10 kartų mažesnį už pradinį skaičių. Pirmasis skaičius 10 kartų didesnis už antrąjį. Vadinasi, mažesnysis skaičius 11 kartų mažesnis už sumą. $13{,}5927:11=1{,}2357$.
Atsakymas. 1,2357; 12,357.

46. Skaičiaus $1999^{2000}=(1999^2)^{1000}$ paskutinis skaitmuo yra 1. Todėl skaičiaus $1999^{2000}+2$ paskutinis skaitmuo yra 3. Bet nėra skaičiaus, kurio kvadrato paskutinis skaitmuo būtų 3. Taigi skaičius $1999^{2000}+2$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

47. Kadangi skaičiaus skaitmenų suma yra teigiamas skaičius, tai ieškomas skaičius ne didesnis už triženklį skaičių. Tarkime, kad ieškomas skaičius yra $\overline{abc}$. Net triženklio skaičiaus skaitmenų suma ne didesnė už 27, todėl $a=3$.

$$328-\overline{3bc}=3+b+c,$$

$$325-300-(10b+c)=b+c,$$

$$11b+2c=25.$$

Matome, kad b ne didesnis už 2 ir yra nelyginis skaičius. Vadinasi, $b=1$, o $c=7$.
Atsakymas. 317.

48. Nustatysime, kuris skaičius mažiau skiriasi nuo 1: $1-\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}=\frac{4}{5\,555\,555\,557}$ ir $1-\frac{6\,666\,666\,663}{6\,666\,666\,667}=\frac{4}{6\,666\,666\,667}$. Kadangi mažiau nuo vieneto skiriasi antrasis skaičius, tai jis yra didesnis.
Atsakymas. Antrasis.

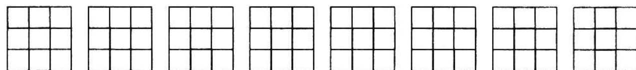
49. Antrasis teiginys yra neteisingas. Jei jis būtų teisingas, tai skaičiaus $A+7$ paskutinis skaitmuo būtų 8, o skaičiaus $A-8$ paskutinis skaitmuo būtų 3. Turėtume du neteisingus teiginius, nes nėra natūraliojo skaičiaus, kurio kvadrato paskutinis skaitmuo būtų 3 arba 8. Gautume prieštaravimą sąlygai. Nagrinėkime skirtumą $(A+7)-(A-8)=15$. Raskime du skaičius, kurių kvadratų skirtumas būtų 15. Tai 49 ir 64. Turėsime:
$\begin{cases}A+7=64,\\A-8=49;\end{cases}$ $A=57.$
Atsakymas. 57.

50. Bet kurį natūralųjį skaičių galima užrašyti pavidalu $3m+r$, kur $r=$ arba 0, arba 1, arba 2. $(3m+r)^2=9m^2+6mr+r^2$. Kadangi $9m^2$ ir $6mr$ dalūs iš 3, tai ir r^2 dalus iš 3. Vadinasi, $r=0$, ir $(3m)^2=9m^2$ dalijasi iš 9.

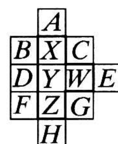
51. Kadangi skaičiaus kvadrato skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai ir pats skaičiaus kvadratas dalijasi iš 3. Bet remiantis 50 uždaviniu tada jis dalijasi iš 9, taigi ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Bet 2001 iš 9 nesidalija, — prieštara.
Atsakymas. Ne, negali.

11.4. Mėgstantiems geometriją

52.

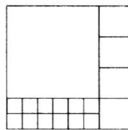


53. Pažymėkime keturis tuščius kvadratėlius raidėmis X, Y, Z ir W.
Jei W bus pagrindas, tai X, Y ir Z bus 3 sienos, o ketvirtąja gali būti A, E arba H.
Jei Y bus pagrindas, tai X, W ir Z bus 3 sienos ir bet kuri iš B, D ar F — ketvirtoji.
C ir G nebus sienos, nes keturios kubo sienos negali išeiti iš vieno taško.



54. Kadangi ant kubo sienų rašomi iš eilės einantys natūralieji skaičiai, tai ant penkių sienų yra užrašyti skaičiai: 11, 12, 13, 14, 15. Šeštasis gali būti 10 arba 16. Jei 10, tai jis turi būti prieš 15: $15+10=11+14=25$. Bet taip nėra. Jei 16 prieš 11, 12 prieš 15 ir 14 prieš 13, tai $16+11=12+15=13+14=27$. Tuomet $S=27\cdot3=81$.

55. Galima padalyti, pavyzdžiui, taip:



Yra ir kitų dalijimo būdų.

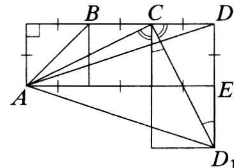
56.

1 2 3 4 5

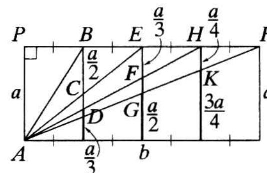
Kampas lygus pirmajam (*1*)
Kampas lygus antrajam (2)
Kampas lygus trečiajam (*3*)
Kampas lygus ketvirtajam (*4*)

Papildžius brėžinį: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 45°$.

57. Papildykime brėžinį: pažymėkime tašką D_1, simetrišką taškui D atkarpos AE atžvilgiu. $\triangle ACD_1$ — statusis lygiašonis ($AC = CD_1$, $\angle ACD_1 = 90°$). $\angle CAD_1 = 45°$, be to, $\angle CAD_1 = \angle CAE + \angle EAD_1$, $\angle BAE = 45°$.
Vadinasi, $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE = 90°$.

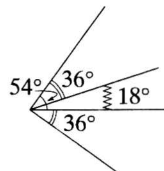


58. BC — trikampio APE vidurinė linija,
$BC = \frac{a}{2}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{ab}{16}$;
$EF = \frac{a}{3}$; $CD = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$; $S_{CEFD} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6}\right) \cdot \frac{b}{4} = \frac{ab}{16}$;
$HK = \frac{a}{4}$; $FG = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$; $S_{FHKG} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4} + \frac{a}{6}\right) \cdot \frac{b}{4} = \frac{5ab}{96}$;
Užtušuotos dalies plotas lygus: $\frac{ab}{16} + \frac{ab}{16} + \frac{5ab}{96} = \frac{17ab}{96}$.

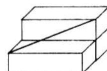


Užtušuotos dalies plotą galima apskaičiuoti ir kitaip, pavyzdžiui,
$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{b}{4} + \frac{CD+EF}{2} \cdot \frac{b}{4} + \frac{FG+HK}{2} \cdot \frac{b}{4}$;
$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{4}(BC + CD + EF + FG + HK) = \frac{b}{8}\left(\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) + \frac{a}{3} + \left(\frac{2a}{3} - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{4}\right) = \frac{b}{8} \cdot \frac{17a}{12} = \frac{17ab}{96}$.
Atsakymas. $\frac{17ab}{96}$.

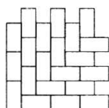
59. 1) Kampą papildyti iki 90°.
2) 36° kampą atidėti duoto kampo viduje nuo vienos kraštinės; gausime 18° kampą.
3) 36° kampą dalyti pusiau arba jo viduje nuo kraštinės atidėti 18° kampą.



60. Sudėti plytas, pvz., taip:

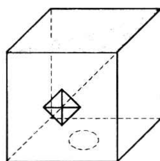


61.



62. Ne. Vienas mažesnysis trikampis gali dengti tik vieną viršūnę, du — dvi.

63.

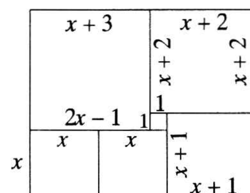


 — priekinėje sienoje,

 — ant apatinio pagrindo.

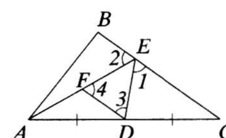
Nuspalvinti trikampiai — vienas ant viršutinio pagrindo, kitas galinėje sienoje.

64.

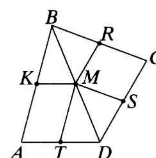


$x + 3 = 2x - 1$, $x = 4$.

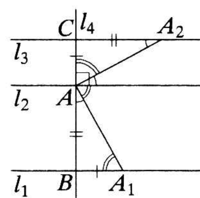
65. Brėžkime $DF \parallel BC$. Pagal Talio teoremą $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{1}$.
Vadinasi, $2AF = AE$.
$AE : EF = 2 : 1$. Kadangi $FD \parallel BC$, tai $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 2 = \angle 4$.
$\triangle DEF$ — lygiašonis, $ED = EF$. $AE : DE = 2 : 1$.



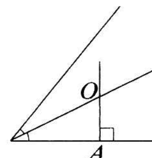
66. $MT \parallel AB$ ir $MT = AK = \frac{1}{2}AB$, tai T — AD vidurio taškas;
$KM \parallel AD$ ir $KM = AT = \frac{1}{2}AD$, tai K — AB vidurio taškas.
KM ir MT — $\triangle ABD$ vidurinės linijos.
M — BD vidurio taškas. Todėl MR ir MS — $\triangle BCD$ vidurinės linijos. Vadinasi, $MR \parallel DC$, $MS \parallel BC$, ir $MRCS$ — lygiagretainis.



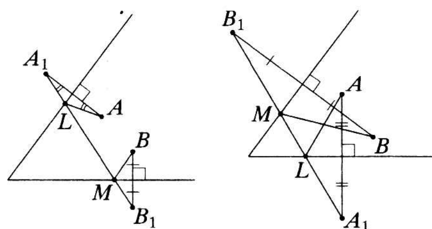
67. 1) Tiesėje l_2 pasirinkime tašką A.
2) Brėžkime $l_4 \perp l_2$ ir susikirtimo taškus su tiesėmis l_1 ir l_3 pažymėkime B ir C.
3) Tiesėje l_1 atidėkime $BA_1 = AC$, o tiesėje l_3 — $CA_2 = AB$.
4) A_1, A, A_2 — trys kvadrato viršūnės.
Įrodykite, kad $\triangle ACA_2 = \triangle AA_1B$ ir kad $\angle A_2AA_1$ yra status.



68. 1) Nubrėžkite duoto kampo pusiaukampinę.
2) Per tašką A nubrėžkite tiesę, statmeną kampo kraštinei. Šios tiesės ir pusiaukampinės susikirtimo taškas O — apskritimo centras, spindulys — OA.

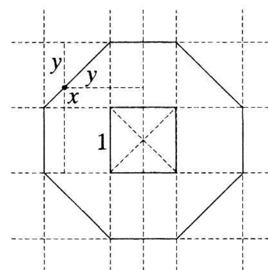


69. 1) Raskite taškus A_1 ir B_1, simetriškus taškams A ir B kampo kraštinių atžvilgiu.
2) Brėžkite atkarpą A_1B_1, o jos susikirtimo taškus su kampo kraštinėmis pažymėkite L ir M.
3) Laužtė $ALMB$ trumpiausia, nes jos ilgis lygus atkarpai A_1B_1.
Griežtai kalbant, reikėtų nagrinėti kitą atvejį, kai taškai A_1 ir B_1 simetriški duotiesiems taškams kitų kraštinių atžvilgiu, o iš gautų dviejų laužčių imti trumpiausią.

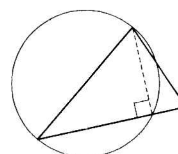


70. Negalima. 17-kampio kampų suma lygi $180° \cdot (17-2) = 180° \cdot 15$. Keturiolikos trikampių kampų suma lygi $14 \cdot 180°$. Kai 17-kampį padalijame į trikampius, trikampių kampų suma gali būti lygi 17-kampio kampų sumai arba didesnė už ją.

71. Ieškomoji taškų aibė — aštuoniakampio, kurio 4 kraštinės lygiagrečios duotojo kvadrato kraštinėms ir nutolusios nuo jo centro atstumu 1,5 vieneto. Lengva įrodyti, kad $x + y = 1$.



72. Tarkime, kad yra taškas, kurio neuždengė skrituliai. Sujungę jį su keturkampio viršūnėmis gauname 4 smailiuosius kampus (juk taškas yra visų skritulių išorėje). Bet visų keturių kampų suma lygi 360°. Gavome prieštarą.





Leidinys atitinka ŠMM patvirtintus standartus ir programas.
Leidinys atitinka matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti
leidyklos specialistų.

Tai antrasis – pataisytas ir papildytas – šios knygos leidimas. Knyga skiriama mokytojui, dėstančiam matematiką 9 klasėje ir naudojančiam vadovėlį „Matematika 9, I ir II dalys“ bei atitinkamą uždavinyną. Ją sudaro įvadas ir pagrindinė dalis.

Įvadinėje dalyje pateikti:

1. Pratarmė;
2. Mokomosios kompiuterinės priemonės „Matematika 9 su Dinamine geometrija“ turinys;
3. Vadovėlio „Matematika 9“ turinys nurodant rekomenduojamą minimalų pamokų skaičių temai nagrinėti.

Pagrindinė knygos dalis atitinka vadovėlį „Matematika 9“. Skyrių ir skyrelių pavadinimai tie patys, kaip ir vadovėlio, jų medžiaga pateikiama pagal vieningą schemą. Kiekviename skyriuje (ar jo skyreliuose):

- analizuojama teorinė medžiaga, išskiriant pagrindinius, svarbiausius dalykus;
- primenama, ko buvo mokoma anksčiau (***Pakartoti***), nurodoma, ko reikėtų mokyti einamuoju momentu (***Išmokti***), ir pateikiama skyrelio teorinės dalies santrauka su paaiškinimais (***Šiame skyrelyje***);
- pateikiami metodiniai-praktiniai nurodymai mokytojui;
- pateikiami sunkesnių uždavinių sprendimai ir visų uždavinių atsakymai (PRATIMAI IR UŽDAVINIAI). Dešinėje kolonėlėje pažymėti rekomenduojami uždavinyno uždaviniai. Taip pat ten rašomos įvairios pastabos apie atskirus pratimus ir uždavinius.

Kiekvieno skyriaus teorinės medžiagos analizės pabaigoje pateikiami tame skyriuje vadovėlio autorių keliami tikslai mokinių žinioms, suskirstant juos lygmenimis: ***minimaliuoju, pagrindiniu*** ir ***išplėstiniu***.

ISBN 9955-680-41-5
